Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo III - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Sequências

1. Prove que cada limite a seguir pela definição.

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{3-5n} = -\frac{2}{5}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$

   (c) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2-4n}{4n-7} = -1$

2. Prove que se $|r| < 1$, então a sequência (x_n) dada por $x_n = nr^n$ é convergente, e converge para zero.

3. Prove por indução matemática que $n^2 \leq 2^n$, $\forall n \geq 4$. Em seguida, use isto para provar que a sequência (x_n) dada por $x_n = \frac{n^2}{4^n}$ é convergente. Para quanto converge (x_n)?

4. Prove o seguinte teorema, versão para sequências do Teorema do Sanduíche:
   Teorema. *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = a$, então $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$.*

5. Utilize o teorema anterior para provar que $\frac{\cos n}{n} \to 0$.

6. *Cálculo do limite da sequência $x_n = \sqrt[n]{n}$.* Os itens a seguir nos fornecem uma forma de determinar o limite da sequência (x_n) dada por $x_n = \sqrt[n]{n}$.

   (a) Mostre que $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Se $r \in \mathbb{R}$, com $r \geq 0$, prove por indução sobre n que

   $$(1+r)^n \geq 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2}r^2.$$

   Em seguida, conclua que $(1+r)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}r^2$.

   (c) Usando os itens acima, prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

7. Seja (x_n) a sequência definida por $x_n = \sqrt[n]{2}$. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$.

8. Sendo $a, b \geq 0$, mostre que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

9. **(Sel. Mestr. UFRGS 2010/1)** Prove que se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ é uma sequência limitada, então $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Mostre com um contra-exemplo que a conclusão acima não é válida se retirarmos a hipótese de $(b_n)_{n\geq 0}$ ser limitada.

10. Prove que se (x_n) for uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) tem o mesmo limite a.

11. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = a.$$

12. Mostre que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

Sugestão: Escreva inicialmente $1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$.

13. Seja (x_n) uma sequência de números reais e suponha que $\exists\lambda$, com $0<\lambda<1$ e $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tais que $|x_{n+1}|\leq\lambda|x_n|$, $\forall n\geq n_0$. Prove que $x_n\to 0$.

14. Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tais que existe $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$. Prove que $\exists\lambda$, com $0<\lambda<1$ e $n_0\in\mathbb{N}$ tais que $|x_{n+1}|\leq\lambda|x_n|$, $\forall n\geq n_0$. Conclua que

$$x_n>0,\ \forall n,\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1 \Longrightarrow x_n\to 0.$$

Em seguida, use o resultado acima para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,\ \forall a>0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

15. Prove que as sequências a seguir são convergentes:

(a) $x_n=\frac{n}{3^{n+1}}$ (b) $x_n=\frac{2^n}{1+2^n}$ (c) $x_n=\frac{n^2}{2^n}$ (d) $x_n=\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$

16. Encontre o limite da seguinte sequência, justificando:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}.$$

17. Defina uma sequência (x_n) recursivamente por

$$x_1=1,\ x_{n+1}=\frac{x_n}{3}+1.$$

Prove que (x_n) é monótona e limitada e calcule o seu limite.

18. **(Sel. Mestr. UFSM 2010/1)** Seja (a_n) uma sequência dada recursivamente por $a_1=\sqrt{3}$ e $a_n=\sqrt{3+a_{n-1}}$, $n>1$. Mostrar que (a_n) é convergente. Calcule $\lim_{n\to\infty}a_n$.

19. Prove que a sequência

$$1,\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots$$

converge e que seu limite é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

20. Ponha $x_1=1$ e defina $x_{n+1}=1+\sqrt{x_n}$. Mostre que a sequência (x_n), assim obtida, é limitada. Determine $a=\lim_{n\to\infty}x_n$.

21. **(Sel. Mestr. UFSM 2011/1)** Seja (a_n) a sequência definida indutivamente por:

$$a_1=\sqrt{2} \ \text{ e } \ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},\ \text{ para } n>1.$$

(a) Mostre, por indução, que $a_n<2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(b) Mostre que (a_n) é crescente (sugestão: verifique que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0$ para $n > 1$, então $a_{n+1} > a_n$).

(c) Conclua, pelos itens anteriores, que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

22. Considere a sequência de números reais

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \quad \ldots$$

Mostre que essa sequência é convergente e encontre seu limite.