Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Terceira Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 02/12/2022

Questão 01. [2,0 pt] Sejam $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in A'$. Suponha que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$ e seja $\sqrt{f}$ a função definida para $x \in A$ por $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, prove que

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Questão 02. [1,0 pt] Calcule o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 5x - 1} \right)^{\frac{2x - 3x^2}{3x+2}}$.

Questão 03. [2,0 pt] Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Usando apenas a definição de limite no infinito, prove que são equivalentes:

(i) $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$,

(ii) para toda sequência (x_n) em $(a, +\infty)$, $x_n \to +\infty \Longrightarrow f(x_n) \to L$.

Questão 04. [2,0 pt] Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é contínua somente na origem e descontínua em todos os outros pontos da reta.

Questão 05. [1,0 pt] Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2)$. Mostre que existe um ponto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c + 1)$. [Sugestão: considere a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x + 1) - f(x)$]

Questão 06. [2,0 pt] Seja a função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Mostre que f é uniformemente contínua de duas formas:

(a) usando a definição de continuidade uniforme;

(b) mostrando que f é de Lipschitz e concluir.
