Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO **Data: 04/11/2022**

Questão 01. [Peso 0,5] Use a definição de limite de sequência para provar que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1-3n} = -\frac{2}{3}$.

Questão 02. [Peso 1,0] Sejam (x_n) uma sequência convergente e (y_n) uma outra sequência tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Segue que (y_n) é convergente?

Questão 03. Seja (x_n) a sequência definida recursivamente por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n} \end{cases}$$

Mostre que (x_n) é convergente de duas formas, justificando formalmente:

(a) [Peso 1,0] mostrando que (x_n) é monótona e limitada.

(b) [Peso 1,0] encontrando um $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|, \, \forall n > 1.$$

Em seguida, determine $\lim_{n\to\infty} x_n$. [Peso 0,5]

Questão 04. [Peso 0,5] Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais positivos tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

Mostre que se (x_n) for limitada, então $y_n \to 0$.

Questão 05. [Peso 0,5] Mostre que a sequência (x_n) dada por $x_n = (-1)^n \cos n - \frac{3}{2} \operatorname{sen} n^2$ possui uma subsequência convergente, justificando seus argumentos.

Questão 06. [Peso 1,0] Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Mostre que a aplicação $d : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty)$ definida por

$$d(x,y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

define uma métrica em $X_1 \times X_2$, onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

Questão 07. Determine $\operatorname{int}(\mathbb{Q})$, $\overline{\mathbb{Q}}$ e $\partial\mathbb{Q}$ em relação ao conjunto (justifique suas respostas):

(a) [Peso 1,0] dos números reais $\mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{Q}$ seria fechado? Justifique.

(b) [Peso 1,0] dos números racionais $\mathbb{Q}$. Neste caso, $\mathbb{Q}$ seria fechado? Justifique.

Questão 08. [Peso 1,0] Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Prove que X é um aberto de M se, e somente se, $X \cap \partial X$ for um conjunto vazio.

Questão 09. [Peso 0,5] Use a definição de limite de função para provar que

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = -4.$$

Questão 10. [Peso 0,5] Seja $\mathbb{K} = (-\infty, +\infty)$ um corpo ordenado não arquimediano. Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um compacto de $\mathbb{K}$.

01) Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em $|x_n - (-\frac{2}{3})| < \varepsilon$.

Avaliando $|x_n + \frac{2}{3}|$:

$$|x_n + \tfrac{2}{3}| = \left|\frac{2n}{1-3n} + \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{\cancel{6n} + 2 - \cancel{6n}}{3(1-3n)}\right| = \frac{2}{3|1-3n|}$$

$$= \frac{2}{3(3n-1)}$$

Note que $3n-1 > 3n-3 = 3(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3n-1} < \frac{1}{3(n-1)}$$

Assim;

$$|x_n + \tfrac{2}{3}| = \frac{2}{3(3n-1)} < \frac{2}{3 \cdot 3(n-1)} = \frac{2}{9(n-1)}$$

Obs.: $\frac{2}{9(n_0-1)} < \varepsilon$ $\Rightarrow n_0 - 1 > \frac{2}{9\varepsilon}$

$\frac{9(n_0-1)}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ $n_0 > \frac{2}{9\varepsilon} + 1$.

Assim, tome $n_0 > \frac{2}{9\varepsilon} + 1$. Então, $\forall n \geq n_0$, segue que

$$n-1 \geq n_0-1 \Rightarrow 9(n-1) \geq 9(n_0-1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9(n-1)} \leq \frac{2}{9(n_0-1)}$$. Disso; $\forall n \geq n_0$:

$$\left|x_n+\frac{2}{3}\right| < \frac{2}{9(n-1)} \leq \frac{2}{9(n_0-1)} < \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}\varepsilon}{\cancel{2}} = \varepsilon$$

$$n_0 > \frac{2}{9\varepsilon}+1$$

$$\Rightarrow n_0-1 > \frac{2}{9\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_0-1} < \frac{9\varepsilon}{2}$$

---

02) Seja (x_n) convergente, digamos que $x_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$. Seja (y_n), outra seq. tal que; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - y_n| < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0 . \qquad (I)$$

Vamos mostrar que (y_n) também converge (e converge para $a \in \mathbb{R}$ também).

Como $x_n \to a$, para o $\varepsilon > 0$ dado acima, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1$, implica em

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (II)$$

Tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\} \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall n \geq \tilde{n}$, temos que valem (I) e (II). Com isso:

$$|y_n - a| = |y_n - x_n + x_n - a| \leq \underbrace{|x_n - y_n|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|x_n - a|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$ $|y_n - a| < 2\varepsilon$, $\forall n \geq \tilde{n}$, i.e., a seq. (y_n) também converge e $y_n \to a$.

---

03) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n} \end{cases}$.

Defina $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{3(1+x)}{3+x}$.

Note que f é crescente pois

$$f'(x) = \frac{(3+x).3 - (3+3x).1}{(3+x)^2} = \frac{9 + \cancel{3x} - 3 - \cancel{3x}}{(3+x)^2} = \frac{6}{(3+x)^2} > 0$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$; logo, f é crescente.

Além disso, pela def. recursiva de (x_n) segue que

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) <u>AF-01</u>: (x_n) é monótona. De fato, vamos mostrar que (x_n) é crescente. Isso será feito por indução sobre n.

(i) $n=1$: $x_1 = 1$

$$x_2 = \frac{3\cdot(1+2)}{3+1} = \frac{6}{4} > \frac{4}{4} = 1 = x_1.$$

$\Rightarrow x_2 > x_1$. Logo, vale a base da indução.

ii) Suponha que $x_k < x_{k+1}$. Vamos mostrar que $x_{k+1} < x_{k+2}$. De fato, como f é crescente, segue que

$$\left.\begin{array}{ccc} f(x_k) & < & f(x_{k+1}) \\ \| & & \| \\ x_{k+1} & & x_{k+2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{k+1} < x_{k+2}.$$

Logo, vale (ii).

Portanto, por (i) e (ii) segue por indução que a seq. (x_n) é crescente. (monótona).

AF-02 (x_n) é limitada: De fato, mostraremos que (x_n) é limitada superiormente por $\sqrt{3}$.

Isso será feito por indução sobre n.

(i) $x_1 = 1 < \sqrt{3}$. Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que $x_k < \sqrt{3}$ para um certo $n = k$.

Vamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, que $x_{k+1} < \sqrt{3}$. De fato; como f anteriormente definida é crescente, segue que, de $x_k < \sqrt{3}$, vem:

$$f(x_k) < f(\sqrt{3}) \Longrightarrow x_{k+1} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =$$

$$\Rightarrow x_{k+1} < \frac{3(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3(\cancel{3} - \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \cancel{3})}{6}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} < \frac{3.(2\sqrt{3})}{6} \Rightarrow x_{k+1} < \sqrt{3}.$$

Logo, vale (ii). Pelos itens (i) e (ii) segue por indução a AF-02.

Pelas afirmações 01 e 02 segue que (x_n) é convergente, pois é monótona e limitada.

b) $$|x_{n+1}-x_n| = \left| \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - \frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}} \right| =$$

$$= \left| \frac{(3+3x_n)(3+x_{n-1}) - (3+3x_{n-1})\cdot(3+x_n)}{(3+x_n)(3+x_{n-1})} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cancel{9} + 3x_{n-1} + 9x_n + \cancel{3x_n \cdot x_{n-1}} - \cancel{9} - 3x_n - 9x_{n-1} - \cancel{3x_n x_{n-1}}}{(3+x_n)(3+x_{n-1})} \right|$$

$$= \frac{|6x_n - 6x_{n-1}|}{|(3+x_n)(3+x_{n-1})|} \qquad (*)$$

Como $x_1 = 1$ e (x_n) é crescente (já mostramos isso), segue que $x_n > 0$, $\forall n$. Então:

$$|(3+x_n)\cdot(3+x_{n-1})| = |3+x_n|\cdot|3+x_{n-1}| \geq 3\cdot 3 = 9,$$

logo, $$\frac{1}{|(3+x_n)(3+x_{n-1})|} \leq \frac{1}{9},$$

e disso, $(*)$ fica estimado por

$$|x_{n+1}-x_n| = \frac{|6x_n - 6x_{n-1}|}{|(3+x_n)(3+x_{n-1})|} \leq \frac{6}{9}|x_n - x_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1}-x_n| \leq \frac{2}{3}|x_n - x_{n-1}|$$

Ou seja, obtemos $\lambda = \frac{2}{3} < 1$.

Assim, pelo T. das aproximações sucessivas segue que (x_n) é convergente.

Finalmente, sendo (x_n) convergente, pela def. recursiva, vem:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to L} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} \to \frac{3(1+L)}{3+L}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{3(1+L)}{3+L}$$

$$L(3+L) = 3+3L$$

$$3\cancel{L} + L^2 = 3 + 3\cancel{L}$$

$$L^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} L = \sqrt{3} \\ L = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Como $x_n > 0$, $\forall n$, então $\boxed{L = \sqrt{3}}$.

---

04) $x_n, y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty. \quad \text{Suponha } (x_n) \text{ limitada.}$$

Vamos mostrar que $y_n \to 0$.

Como $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$, então, dado $M > 0$, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > M$.

Além disso, sendo (x_n) limitada, por hipótese, segue que $\exists\, K > 0$ tal que

$$|x_n| \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, $\forall n \geq n_0$, temos que

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = \frac{x_n}{y_n} > M \Rightarrow \frac{y_n}{x_n} < \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow y_n < \frac{x_n}{M} = \frac{|x_n|}{M} \leq \frac{K}{M}.$$

Assim, tomando $\varepsilon = \frac{K}{M} > 0$, segue que

$$|y_n - 0| = |y_n| = y_n < \frac{K}{M} = \varepsilon,$$

sempre que $n \geq n_0$, ou seja, acabamos de mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0.$$

05) Seja a seq. (x_n) dada por

$$x_n = (-1)^n \cdot \cos n - \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sen} n^2.$$

Então, temos que, $\forall n$:

$$|x_n| = \left| (-1)^n \cdot \cos n - \frac{3}{2} \operatorname{sen} n^2 \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|\cos n|}_{\leq 1} + \frac{3}{2} \underbrace{|\operatorname{sen} n^2|}_{\leq 1} \leq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Ou seja, $|x_n| \leq \frac{5}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i.e., (x_n) é uma seq. limitada. Assim, pelo T. de Bolzano-Weierstrass tem-se que (x_n) possuirá uma subsequência convergente.

---

06) (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos.

defina $d: X_1 \times X_2 \to [0, +\infty)$

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2),$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$

Vamos mostrar que d define uma métrica em $X_1 \times X_2$. De fato:

• POSITIVIDADE:

$$\underbrace{d(x,y)}_{} = \underbrace{d_1(x_1,y_1)}_{\geq 0} + \underbrace{d_2(x_2,y_2)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ ; e}$$

$$d(x,y) = 0 \iff d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) = 0$$

$$\iff d_1(x_1,y_1) = 0 \text{ e } d_2(x_2,y_2) = 0$$

$$\iff x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2$$

$$\iff (x_1,x_2) = (y_1,y_2)$$

$$\iff x = y$$

• SIMETRIA:

$$d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) =$$

$$= d_1(y_1,x_1) + d_2(y_2,x_2) = d(y,x)$$

vale a simetria para d_1 e para d_2

- DESIGUALDADE TRIANGULAR:

$$d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \leq$$

desigualdade triangular de d_1 e d_2 valem

$$\leq d_1(x_1,z_1) + d_1(z_1,y_1) + d_2(x_2,z_2) + d_2(z_2,y_2)$$

$$= d_1(x_1,z_1) + d_2(z_2,x_2) + d_1(z_1,y_1) + d_2(z_2,y_2)$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

Logo, d é uma métrica em $X_1 \times X_2$.

---

07) Vamos determinar $\operatorname{int}\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ e $\partial\mathbb{Q}$ em relação:

(a) a $\mathbb{R}$:

- $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$ pois, $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\forall \varepsilon > 0$, $B(q,\varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$, pois, devido à densidade de $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$ haverão números irracionais na $B(q,\varepsilon)$.

- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. De fato, $\forall q \in \mathbb{Q}$,

  considere a seq. $(x_n) = (q, q, q, \dots)$ e

  é tal que $x_n \to q$. Logo, $\forall q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q \in \overline{\mathbb{Q}}$

  Além disso, $\forall\, a \in \mathbb{I}$, podemos

  construir uma seq. (x_n) de números

  racionais tal que $x_n \to a$.

  Logo, $a \in \mathbb{I} \Rightarrow a \in \overline{\mathbb{Q}}$.

  conclusão: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

- $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

  De fato, $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{int} \mathbb{Q}$

  $$= \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$$

(b) em relação a $\mathbb{Q}$:

- $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, pois agora a noção de intervalo é sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais.

- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, pois o corpo agora é $\mathbb{Q}$.

- $\partial \mathbb{Q} = \emptyset$; pois

$$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \partial \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q} = \emptyset .$$

---

08) M - espaço métrico. $X \subset M$.

Provar: X é aberto de $M \Leftrightarrow X \cap \partial X = \emptyset$

Suponha X aberto de M.

Por absurdo, suponha que $X \cap \partial X \neq \emptyset$.

Então, $\exists\ x_0 \in X \cap \partial X$. Logo, $x_0 \in X$ e $x_0 \in \partial X$.

Como X é aberto, para tal $x_0 \in X$, segue que $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subset X$. Assim,

$$B(x_0, \varepsilon) \cap X = B(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset .$$

Disso, $B(x_0, \varepsilon) \cap X^c = \emptyset$. Mas como $x_0 \in \partial X$, temos que ter $B(x_0, \varepsilon) \cap X^c \neq \emptyset$, um absurdo.

Logo, $X \cap \partial X = \emptyset$.

Reciprocamente, suponha que $X \cap \partial X = \emptyset$.

Vamos mostrar que X é um aberto de M.

Dado $a \in X$. Pela hipótese segue que $a \notin \partial X$.

Então, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que

$$B(a, \varepsilon_0) \cap X = \emptyset \quad \text{ou} \quad B(a, \varepsilon_0) \cap X^c = \emptyset \qquad (*)$$

Como $a \in X$ e $a \in B(a, \varepsilon_0)$, a primeira igualdade de $(*)$ não ocorre. Então concluímos que

$$B(a, \varepsilon_0) \cap X \neq \emptyset \quad \text{e}$$
$$B(a, \varepsilon_0) \cap X^c = \emptyset$$

Disso segue que $B(a, \varepsilon_0) \subset X$.

Pela arbitrariedade da escolha de a segue que X é um aberto de M.

---

09) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = -4$:

Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que,

$\forall x : 0 < |x-4| < \delta \implies |f(x) - (-4)| < \varepsilon$.

Analisando $|f(x) + 4|$:

$$|f(x)+4| = \left|\frac{x-4}{2-\sqrt{x}} + 4\right| = \left|\frac{x-4}{2-\sqrt{x}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + 4\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{4-x} + 4\right| = \left|\frac{(x-4)(2+\sqrt{x})+4(4-x)}{(4-x)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(x-4)(2+\sqrt{x})-4(x-4)}{4-x}\right| = \left|\frac{\cancel{(x-4)}.[2+\sqrt{x}-4]}{-\cancel{(x-4)}}\right|$$

$$= |\sqrt{x}-2| = \left|(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right| = \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right|$$

$$= \frac{|x-4|}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{\delta}{|\sqrt{x}+2|}$$

Como $|\sqrt{x}+2| \geq \sqrt{x}+2 \geq 2$, então

$\frac{1}{|\sqrt{x}+2|} \leq \frac{1}{2}$, e disso, obtemos

$|f(x)+4| < \frac{\delta}{|\sqrt{x}+2|} < \frac{\delta}{2} := \varepsilon$; ou seja,

basta tomar $\delta = 2\varepsilon$. $\square$

10) Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado não-arquimediano. Assim, $\exists\, x_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 > 0$ tal que,

$$\frac{1}{n} \geq x_0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad ;$$

ou seja, $\quad n \leq \dfrac{1}{x_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; i.e., $\mathbb{N}$ fica limitado superiormente por $\dfrac{1}{x_0}$ em $\mathbb{K}$.

Além disso, como $\mathbb{N}$ é discreto, segue que $\mathbb{N}$ é fechado.

Sendo limitado e fechado, pelo T. de Heine-Borel, segue que $\mathbb{N}$ é um compacto do $\mathbb{K}$.