Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Matemática e Física
Segunda Prova de Álgebra Linear I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO **Data:** 01/12/2022

Questão 01. [Peso 2,0] Sejam

$$\beta = \{(1,-1,0);(-1,0,1);(0,0,2)\} \text{ e } \gamma = \{(1,2,-1);(2,0,0);(-1,-1,0)\}$$

duas bases do $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança de base $[I]^{\beta}_{\gamma}$. Em seguida, sendo $[\vec{u}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $[\vec{u}]_{\gamma}$ usando a matriz de mudança de base encontrada.

Questão 02. Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação dada por

$$T(x,y,z) = (x+y-z, 2x+y+z, 2y+3z)$$

(a) [Peso 1,0] Mostre que T é uma transformação linear.

(b) [Peso 1,5] Determine $\ker T$, $\mathrm{Im}(T)$ e suas dimensões.

(c) [Peso 1,0] T é isomorfismo? Justifique. Em caso afirmativo, como obter a transformação inversa T^{-1}?

(d) [Peso 2,0] Determine os autovalores e autovetores de T.

Questão 03. Seja $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $L(x,y,z) = (2x+z, x-4y-z)$.

(a) [Peso 2,0] Determine o núcleo de L, sua imagem e suas dimensões, bem como uma base para o núcleo e uma base para a imagem.

(b) [Peso 1,5] Ache a matriz da transformação $[L]^{\beta}_{\gamma}$ nas bases $\beta = \{(1,-1,2);(0,1,1);(-1,2,0)\}$ e $\gamma = \{(-2,0);(1,2)\}$.

---

01) $\beta = \{(1,-1,0); (-1,0,1); (0,0,2)\}$

$\gamma = \{(1,2,-1); (2,0,0); (-1,-1,0)\}$.

Vamos determinar $[I]^{\beta}_{\gamma}$. Para isso, precisamos representar cada vetor da base β como combinação linear dos vetores da base γ, como segue:

- $(1,-1,0) = a_{11}.(1,2,-1) + a_{21}(2,0,0) + a_{31}(-1,-1,0)$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} - a_{31} = 1 \\ 2.a_{11} \qquad - a_{31} = -1 \\ -a_{11} \qquad\qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = 0 \qquad a_{31} = 1$$

$$\Rightarrow a_{11} + 2.a_{21} - a_{31} = 1$$
$$0 + 2.a_{21} - 1 = 1 \Rightarrow a_{21} = 1$$

- $(-1,0,1) = a_{12}.(1,2,-1) + a_{22}.(2,0,0) + a_{32}(-1,-1,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12} + 2a_{22} - a_{32} = -1 \\ 2.a_{12} \qquad - a_{32} = 0 \\ -a_{12} \qquad\qquad = 1 \end{cases} \qquad a_{32} = -2 \qquad a_{12} = -1$$

$$\Rightarrow a_{12} + 2.a_{22} - a_{32} = -1$$
$$\cancel{-1} + 2.a_{22} + 2 = \cancel{-1} \Rightarrow a_{22} = -1$$

- $(0,0,2) = a_{13}\cdot(1,2,-1) + a_{23}(2,0,0) + a_{33}(-1,-1,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{13} + 2\cdot a_{23} - a_{33} = 0 \\ 2\cdot a_{13} \qquad\qquad - a_{33} = 0 \\ -a_{13} \qquad\qquad\qquad = 2 \end{cases} \qquad a_{33} = -4 \qquad a_{13} = -2$$

$$\Rightarrow a_{13} + 2a_{23} - a_{33} = 0$$

$$-2 + 2\cdot a_{23} + 4 = 0$$

$$\boxed{a_{23} = -1}$$

Assim, obtemos

$$[I]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Por fim:

$$\underbrace{[\vec{u}]_{\gamma}} = [I]^{\beta}_{\gamma}\cdot[\vec{u}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0-2 \\ 2+0-1 \\ 2+0-4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}.$$

02) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

$$T(x,y,z) = (x+y-z, 2x+y+z, 2y+3z)$$

(a) Dados $\vec{u} = (x,y,z)$ e $\vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; vamos mostrar que:

(i) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$;

(ii) $T(\alpha \vec{u}) = \alpha . T(\vec{u})$.

(i) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T((x,y,z)+(a,b,c))$

$= T(x+a, y+b, z+c) = (x+a+y+b-z-c,$

$, 2(x+a)+y+b+z+c, 2(y+b)+3(z+c))$

$= (x+y-z, 2x+y+z, 2y+3z) +$

$+ (a+b-c, 2a+b+c, 2b+3c) =$

$= T(x,y,z) + T(a,b,c) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

(ii) $T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha.(x,y,z)) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) =$

$= (\alpha x + \alpha y - \alpha z, 2.\alpha x + \alpha y + \alpha z, 2\alpha y + 3\alpha z)$

$= \alpha.(x+y-z, 2x+y+z, 2y+3z) =$

$= \alpha . T(x,y,z) = \alpha . T(\vec{u})$

Logo, T é linear.

(b) $\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y-z,\ 2x+y+z,\ 2y+3z) = (0,0,0)\}$,

ou seja, $\ker T$ é a sol. do sist. linear homogêneo:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ \quad 2y+3z=0 \end{cases} \rightsquigarrow y = -\frac{3z}{2}$$

$$\begin{cases} x - \frac{3z}{2} - z = 0 \\ 2x - \frac{3z}{2} + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3z - 2z = 0 \\ 4x - 3z + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 5z = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow z = -4x \rightsquigarrow 2x + 20x = 0 \quad x = 0$$

$$\Rightarrow z = 0 \text{ e } y = 0$$

Então, obtemos

$\ker(T) = \{(0,0,0)\}$

Logo, $\dim \ker(T) = 0$.

$$Im(T) = \{(x+y-z,\ 2x+y+z,\ 2y+3z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 2x, 0) + (y, y, 2y) + (-z, z, 3z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= [(1,2,0);\ (1,1,2);\ (-1,1,3)]$$

Pelo T. da dimensão,

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \underbrace{\dim \ker T}_{=0} + \dim Im\, T$$

$$3 = 0 + \dim Im(T)$$

$$\Rightarrow \dim Im(T) = 3$$

(c) T é isomorfismo pois como $\ker(T) = \{\vec{0}\}$, segue que T é injetiva. Além disso, como $\dim V = 3 = \dim W$ $(V = W = \mathbb{R}^3)$, segue que T é sobrejetiva. E, sendo linear, é isomorfismo.

Dessa forma, $\exists\, T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inversa da T

Se tomarmos $[T]$ a matriz da transf. linear então, como $[T]^{-1} = [T^{-1}]$, obtemos a transf. inversa através da inversa da matriz da transf. $[T]$.

(d) $$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$ Vamos obter os autovalores e os autovetores.

$$([T] - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0} \quad ; \quad \text{onde} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Equação característica:

$$\det([T] - \lambda I) = 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 1 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2 & 3-\lambda & 0 & 2 \end{array}\right| = 0$$

$$(1-\lambda)^2 \cdot (3-\lambda) + 0 - 4 - 0 - 2(1-\lambda) - 2(3-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda) - 2(1-\lambda) - 4 - 2(3-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)(3-\lambda) - 2\right] - 4 - 6 + 2\lambda = 0$$

$$(1-\lambda)(3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2) - 10 + 2\lambda = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda+1)-10+2\lambda=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+1-\lambda^3+4\lambda^2-\lambda-10+2\lambda=0$$

$$-\lambda^3+5\lambda^2-3\lambda-9=0$$

$$\lambda^3-5\lambda^2+3\lambda+9=0$$

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

	1	-5	3	9
	$\downarrow$	-1	$+6$	-9
-1	1	-6	9	0

$\boxed{\lambda=-1}$ é uma raiz

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \iff (\lambda-3)^2=0 \iff \lambda=3$$

MULTIPLICIDADE 2

AUTOVALORES: $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=3$

autovetores:

- $\lambda_1=-1$: De (*), obtemos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 1 & -1 \\ 2 & 1-(-1) & 1 \\ 0 & 2 & 3-(-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ \quad 2y + 4z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow y = -2z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 2z - z = 0 \\ 2x - 4z + z = 0 \end{array} \right\} \quad 2x - 3z = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3z}{2}$$

Ou seja, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$ são da forma

$$(x, y, z) = \left(\frac{3z}{2}, -2z, z \right);$$

i.e., temos o autoespaço:

$$V_{\lambda_1 = -1} = \left\{ \left(\frac{3z}{2}, -2z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\} = \left[\left(\frac{3}{2}, -2, 1 \right) \right]$$

• $\lambda_2 = 3$: De $(*)$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 & -1 \\ 2 & 1-3 & 1 \\ 0 & 2 & 3-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \to y = 0$$

$$\left.\right\} 2x + z = 0 \quad z = -2x$$

Ou seja, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$ são da forma

$$(x, y, z) = (x, 0, -2x);$$

que produzem o autoespaço

$$V_{\lambda_2 = 3} = [(1, 0, -2)].$$

---

03) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$;

$$L(x, y, z) = (2x + z, x - 4y - z)$$

(a) $\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : L(x, y, z) = (0, 0)\}$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x + z, x - 4y - z) = (0, 0)\},$$

ou seja, $\ker(T)$ é a sol. do sist. homogêneo:

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - 4y - z = 0 \end{cases} \to z = -2x$$

$$\downarrow$$

$$x - 4y - (-2x) = 0$$

$$3x - 4y = 0 \to y = \frac{3x}{4}$$

Logo, obtemos

$$\ker(L) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y = \frac{3x}{4} \text{ e } z = -2x\}$$

$$= \{(x, \frac{3x}{4}, -2x)\} = [(1, \frac{3}{4}, -2)]$$

Logo, $\{(1, \frac{3}{4}, -2)\}$ é uma base para $\ker(L)$, donde segue que $\boxed{\dim \ker(L) = 1}$

Logo, pelo T. da dimensão,

$$3 = \dim\mathbb{R}^3 = \underbrace{\dim \ker(L)}_{=1} + \dim \operatorname{Im}(L)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim \operatorname{Im}(L) = 2}$$

$$\operatorname{Im}(L) = \{(2x+z, x-4y-z) : x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

$$= \{(2x, x) + (0, -4y) + (z, -z) : x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

$$= [(2,1); (0,-4); (1,-1)]$$

Tal coleção é L.D. pois $\dim \operatorname{Im}(L) = 2$.

$$(2,1) = \alpha(0,-4) + \beta(1,-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ -4\alpha - \beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4\alpha - 2 = 1 \\ \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Portanto,

$$Im(L) = [(0,-4);(1,-1)], \text{ e disso}$$

segue que $\{(0,-4);(1,-1)\}$ é uma base para $Im(L)$.

(b) $[L]^{\beta}_{\gamma} = ?$ onde

$$\beta = \{(1,-1,2);(0,1,1);(-1,2,0)\}$$

e $\gamma = \{(-2,0);(1,2)\}$. Temos, pois:

$$\begin{cases} L(1,-1,2) = a_{11}\cdot(-2,0) + a_{21}(1,2) & (*) \\ L(0,1,1) = a_{12}(-2,0) + a_{22}(1,2) & (**) \\ L(-1,2,0) = a_{13}(-2,0) + a_{23}(1,2) & (***) \end{cases}$$

Sendo $L(1,-1,2) = (2+2, 1+4-2) = (4,3)$;

de $(*)$ vem:

$$(4,3) = a_{11}(-2,0) + a_{21}(1,2)$$

$$\begin{cases} -2a_{11} + a_{21} = 4 \\ 2a_{21} = 3 \end{cases} \rightarrow a_{21} = \frac{3}{2}$$

$$-2a_{11} + a_{21} = 4$$

$$-2 \cdot a_{11} + \frac{3}{2} = 4 \qquad \times 2 \qquad \begin{cases} -4a_{11} = 5 \\ \boxed{a_{11} = -\frac{5}{4}} \end{cases}$$

$$-4 \cdot a_{11} + 3 = 8$$

Sendo $L(0,1,1) = (0+1,\ 0-4-1) = (1,-5)$; de $(**)$ vem:

$$(1,-5) = a_{12}(-2,0) + a_{22}(1,2)$$

$$\begin{cases} -2a_{12} + a_{22} = 1 \\ 2 \cdot a_{22} = -5 \end{cases} \rightsquigarrow a_{22} = -\frac{5}{2}$$

$$-2 \cdot a_{12} - \frac{5}{2} = 1 \qquad \times 2$$

$$\left.\begin{array}{l} -4 \cdot a_{12} - 5 = 2 \\ -4a_{12} = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{a_{12} = -\frac{7}{4}}$$

Por fim, sendo $L(-1,2,0) = (-2+0,\ -1-8-0) = (-2,-9)$, de $(***)$ vem:

$$(-2,-9) = a_{13}(-2,0) + a_{23}(1,2)$$

$$\begin{cases} -2 \cdot a_{13} + a_{23} = -2 \\ 2 \cdot a_{23} = -9 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{a_{23} = -\frac{9}{2}}$$

$$-2 \cdot a_{13} - \frac{9}{2} = -2 \quad \times 2$$

$$-4 \cdot a_{13} - 9 = -4$$

$$-4a_{13} = 5 \implies a_{13} = -\frac{5}{4}$$

Assim, obtemos:

$$[L]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$