L9

9. Suponha que f e g possuem limites em $\mathbb{R}$ quando $x \to +\infty$ e que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (a, +\infty)$. Prove que $\lim_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Suponha que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L_2$.

Suponha que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (a, +\infty)$

Mostrar: $L_1 \leq L_2$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$, então, $\exists M_1 > 0$ tal que,

$$\forall x > M_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

Como $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L_2$, então, $\exists M_2 > 0$ tal que,

$$\forall x > M_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Tome $M = \max\{M_1, M_2\} > 0$. Assim, $\forall x > M$, valem $(*)$ e $(**)$. Logo, valem:

$$L_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{e}$$

$$L_2 - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L_2 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x > M$$

Como $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (a, +\infty)$, em particular vale $\forall x > M$.

Disso, obtemos

$$L_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \leq g(x) < L_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$L_1 - \frac{\varepsilon}{2} < L_2 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

ou seja,

$$L_1 < L_2 + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

i.e., $L_1 \leq L_2$, como queríamos mostrar. $\square$

L10

2. Usando o segundo limite notável, prove o importante limite abaixo, onde $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ Escreva $a^x - 1 = w$. Então

$$a^x = 1 + w \Rightarrow \ln(a^x) = \ln(1+w)$$

$$x \cdot \ln a = \ln(1+w) \Rightarrow x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln(1+w)$$

Como $w = a^x - 1$, então $w \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a^0 - 1 = 0$. Assim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\frac{\ln(1+w)}{\ln a}} = \lim_{w\to 0} \ln a \cdot \frac{w}{\ln(1+w)} = \ln a \cdot \lim_{w\to 0} \frac{1}{\frac{1}{w} \cdot \ln(1+w)} =$$

$$= \ln a \cdot \frac{1}{\lim_{w\to 0} \frac{1}{w} \cdot \ln(1+w)} = \ln a \cdot \frac{1}{\lim_{w\to 0} \ln(1+w)^{\frac{1}{w}}} = \ln a \cdot \frac{1}{\ln e} = \ln a$$

L1:

7. **(Sel. Mestr. UFRGS 2011/2)**

(a) Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I da reta diz-se Lipschitz se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| < K|x - y|.$$

Prove que se f é Lipschitz, então f é contínua.

(b) Prove que se duas funções f e g são Lipschitz e definidas em um mesmo intervalo I, então $f + g$ é Lipschitz.

(c) Prove que uma função Lipschitz $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I limitado da reta, é uma função limitada.

(d) Prove que se f e g são duas funções Lipschitz definidas em um mesmo intervalo limitado I, então o produto $f \cdot g$ é Lipschitz.

(a) feito em aula. (mostramos que f sendo de Lipschitz implica em ser uniformemente contínua, logo, contínua).

(b) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ de Lipschitz. Vamos mostrar que $f+g$ também o é.

Como f e g são de Lipschitz em I, então, $\exists\, M_1, M_2 > 0$ tais que, $\forall x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M_1 \cdot |x-y| \qquad (*)$$

$$\text{e} \quad |g(x) - g(y)| \leq M_2 \cdot |x-y| \qquad (**)$$

Vamos analisar $|(f+g)(x) - (f+g)(y)|$.

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| =$$

$$= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \underset{\text{DESIGUALDADE TRIANGULAR}}{\leq} |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \underset{\text{por } (*) \text{ e } (**)}{\leq} M_1 \cdot |x-y| + M_2 \cdot |x-y| =$$

$$= \overbrace{(M_1 + M_2)}^{>0} \cdot |x-y|$$

Portanto, $f+g$ também é de Lipschitz.

(c) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é de Lipschitz, vamos mostrar que f é limitada.

Sendo de Lipschitz, então, $\exists\, M > 0$ tal que, $\forall x, y \in I$. I limitado.

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x-y| \leq M \cdot (|x| + |y|) \leq M \cdot (B+B) = M \cdot 2B$$

Como o intervalo I é limitado, então, $\exists\, B > 0$ tal que $|x| \leq B, \forall x \in I$.

Seja $a \in I$ tal que $f(a) \in \mathbb{R}$ (i.e, $f(a)$ é finito), digamos que

↳ isto é possível pois f é contínua.

$$f(a) = C \in \mathbb{R}.$$

Assim, como f é de Lipschitz, segue que $\exists\, M > 0$ tal que

$\forall x \in I$ e para $a \in I$ acima,

$$|f(x) - f(a)| \leq M \cdot |x-a| \underset{\text{DESIGUALD. TRIANGULAR}}{\leq} M \cdot (\underbrace{|x|}_{\leq B} + \underbrace{|a|}_{\leq B}) \underset{\text{pois } I \text{ é limitado}}{\leq} M \cdot (B+B) = 2 \cdot M \cdot B := K, \quad K > 0$$

Ou seja,

$$|f(x)| - |f(a)| \underset{\text{PROPRIEDADE DOS MÓDULOS}}{\leq} |f(x) - f(a)| \leq K \Rightarrow |f(x)| \leq K + \underbrace{|f(a)|}_{=C} = K + C := K_1, \quad K_1 > 0$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq K_1, \quad K_1 > 0, \quad \text{i.e., } f \text{ é limitada.}$$

(d) Sejam f, g de Lipschitz, $f, g : I \to \mathbb{R}$;
com $|x| \leq B, \ \forall x \in I \quad (B > 0)$

Mostrar: $f.g$ é de Lipschitz.

Pelo item anterior, temos que se uma função for de Lipschitz em um intervalo limitado, então ela é limitada.

Como f e g são de Lipschitz, então, $\exists M_1, M_2 > 0$ tais que, $\forall x, y \in I$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M_1 . |x - y| \quad (I)$$

e

$$|g(x) - g(y)| \leq M_2 . |x - y| \quad (II)$$

Vamos analisar $|(f g)(x) - (f.g)(y)|$

Em particular, sendo f de Lipschitz então f é limitada no intervalo limitado I, ou seja, $\exists B_1 > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq B_1, \ \forall x \in I. \quad (*)$$

Do mesmo modo, sendo g de Lipschitz, então g é limitada no intervalo limitado I, ou seja, $\exists B_2 > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq B_2, \ \forall x \in I \quad (**).$$

Analisando:

$$|(f g)(x) - (f g)(y)| = |f(x) . g(x) - f(y) . g(y)|$$

$$= |f(x) . g(x) - f(x) . g(y) + f(x) . g(y) - f(y) . g(y)|$$

$$= |f(x) (g(x) - g(y)) + g(y) (f(x) - f(y))| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x)|}_{\substack{\leq B_1 \\ \text{por } (*)}} . \underbrace{|g(x) - g(y)|}_{\substack{\leq \\ M_1 . |x - y| \\ \text{por } (I)}} + \underbrace{|g(y)|}_{\substack{\leq B_2, \\ \text{por } (**)}} . \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\substack{\leq \\ M_2 . |x - y| \\ \text{por } (II)}} \leq$$

$$\leq B_1 . M_1 \ |x - y| + B_2 . M_2 . |x - y|$$

$$= \underbrace{(B_1 . M_1 + B_2 . M_2)}_{=: K > 0} . |x - y| = K . |x - y|$$

Ou seja, $f.g$ é de Lipschitz.