TEOREMA: (PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS LIMITES)

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação do conj. X (i.e., $a \in X'$). Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então:

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

(iv) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

DEMONSTR.

(i) Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, segue $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

$$\left[\, \forall x \in \underline{B(a, \delta_1) \setminus \{a\}} \implies f(x) \in B(L, \varepsilon) \,\right]$$

Como $\lim_{x \to a} g(x) = M$, segue que $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, valem $(*)$ e $(**)$

Logo, $\forall x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, avaliando

$$|f(x) + g(x) - (L + M)|,$$

obtemos:

$$|f(x) + g(x) - (L+M)| = |f(x) - L + g(x) - M| \leq \underbrace{|f(x) - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2},\ \text{por } (*)} + \underbrace{|g(x) - M|}_{< \frac{\varepsilon}{2},\ \text{por } (**)} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, mostramos que

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta,$$

ou seja, provamos que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

(ii) é análogo ao item (i).

(iii) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L\cdot M$. :

$\Rightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\exists \lim_{x\to a} f(x) = L$, segue que f é limitada numa vizinhança do ponto a. Ou seja, $\exists K>0$ tal que $|f(x)| \leq K$, numa vizinhança adequada do ponto a, que veremos em seguida.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\exists \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in X : 0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2\cdot(|M|+1)} \quad (*)$$

↳ ADICIONAMOS "+1" PARA EVITAR DIVISÃO POR ZERO, VISTO QUE PODE OCORRER O CASO COM M=0.

Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então, $\exists \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in X : 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad (**)$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, segue que, $\forall x \in B(a,\delta)\setminus\{a\}$ valem $(*)$ e $(**)$. Avaliando $|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M|$, temos:

$$|f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| = |f(x)g(x) - f(x)\cdot M + f(x)\cdot M - L\cdot M| =$$

$$= |f(x)\cdot(g(x)-M) + M\cdot(f(x)-L)| \leq$$

$$\leq |f(x)|\cdot|g(x)-M| + |M|\cdot|f(x)-L| <$$

$$< \underbrace{|f(x)|}_{\leq K}\cdot\underbrace{|g(x)-M|}_{<\frac{\varepsilon}{2K}} + (|M|+1)\cdot\underbrace{|f(x)-L|}_{<\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}} <$$

na vizinhança $B(a,\delta)\setminus\{a\}$ — por $(**)$ — (por $(*)$)

$$< \cancel{K}\cdot\frac{\varepsilon}{2\cancel{K}} + \cancel{(|M|+1)}\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot\cancel{(|M|+1)}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ou seja, para o $\varepsilon>0$ dado, encontramos $\delta>0$ tal que $\forall x : 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)\cdot g(x) - L\cdot M| < \varepsilon$;

i.e., $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M$,

provando o item (iii).

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$. $\quad (M \neq 0)$

Note que podemos escrever

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}},$$

então, se mostrarmos a AF.:

AF.: $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$, segue (iv) de (iii)

Vamos analisar

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x) \cdot M} \right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)| \cdot |M|}$$

Tome $\delta_1 > 0$ tal que, $\forall x : 0 < |x-a| < \delta_1$, implica em

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2} \quad \left(\text{pois } g(x) \xrightarrow[x\to a]{} M \right)$$

$$-|g(x) - M| > -\frac{|M|}{2}$$

Assim:

$$|g(x)| = |M - M + g(x)| \geq |M| - |g(x) - M| > |M| - \frac{|M|}{2} = \frac{|M|}{2}$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|}, \quad \forall x \in B(a, \delta_1) \setminus \{a\} \qquad (*)$$

Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, segue que $\exists\, \delta_2 > 0$

tal que,

$$\forall x \in B(a, \delta_2) \setminus \{a\} \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon \cdot |M|^2}{2} \qquad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$, valem $(*)$ e $(**)$. Logo:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|g(x) - M|}{|g(x)| \cdot |M|} < \frac{2}{|M|^2} \cdot |g(x) - M| <$$

$$< \frac{2}{|M|} \qquad < \frac{\varepsilon \cdot |M|^2}{2}$$

$$< \frac{\cancel{2}}{\cancel{|M|^2}} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \cancel{|M|^2}}{\cancel{2}} = \varepsilon,$$

sempre que $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$, ou seja,

mostramos que $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$.

Logo, pelo item (iii) segue que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0.$$

$\square$

TEOREMA: (limite de função composta). (Pág 225)

Sejam $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: B \to \mathbb{R}$, com $f(A) \subset B$, $a \in A'$, $b \in B'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{y \to b} g(y) = c$,

então $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$, onde $c = g(b)$.

DEMONSTR.: Como $\lim_{y \to b} g(y) = c$, então, c.f. o TEOR. DE HEINE:

$$\forall (y_n) \subset B \text{ tal que } y_n \to b,\ y_n \neq b, \forall n \Rightarrow \underline{g(y_n) \to c} \quad (*)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x \to a} f(x) = b$, então,

$$\forall (x_n) \subset A \text{ tal que } x_n \to a,\ x_n \neq a, \forall n \Rightarrow f(x_n) \to b$$

Como $f(x_n) \in B$, $\forall n$, então a seq. $(f(x_n))_n$ é uma seq. em B. Então, por $(*)$ segue que

$$g(f(x_n)) \to c, \text{ ou seja,}$$

$$(g \circ f)(x_n) \to c.$$

Então, obtemos $(x_n) \subset A$, com $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $\forall n$ tal que $(g \circ f)(x_n) \to c$;

ou seja, c.f. T. de HEINE,

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

$\square$