Resolução de algumas questões da Lista 08, feita pelos alunos.

2. Mostre que a aplicação $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = 2x - 3y + z$ é uma transformação linear.

Dados $\vec{u} = (a,b,c)$ e $\vec{v} = (m,n,\theta) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, Temos:

a) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T((a,b,c)+(m,n,\theta)) = T(a+m, b+n, c+\theta) = 2(a+m) - 3(b+n) + 1(c+\theta) = 2a+2m-3b-3n+c+\theta = (2a-3b+c) + (2m-3n+\theta) = T(a,b,c) + T(m,n,\theta) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{u}+\vec{v})$

b) $T(\alpha\vec{u}) = T(\alpha(a,b,c)) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c) = 2\alpha a - 3\alpha b + \alpha c = \alpha(2a) + \alpha(-3b) + \alpha(c) = \alpha(2a-3b+c) = \alpha(\vec{u}) = T(\alpha\vec{u})$

Assim provamos que a aplicação $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = 2x - 3y + z$ é uma transformação linear.

3) Mostre que a aplicação $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (x-3y+z, x-z)$ é uma transformação linear:

$\vec{u} = (a,b,c)$ e $\vec{v} = (d,e,f) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

a) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T((a+d, b+e, c+f))$

$= (a+d-3(b+e)+c+f, a+d-c-f)$

$= (a-3b+c, a-c) + (d-3e+f, d-f)$

$T(a,b,c) + T(d,e,f)$

$= \boxed{T(\vec{u}) + T(\vec{v})}$

b) $T(\alpha\cdot\vec{u}) = \alpha\cdot T(\vec{u})$

$T(\alpha\cdot\vec{u}) = T(\alpha\cdot(a,b,c)) = T(\alpha\cdot a, \alpha\cdot b, \alpha\cdot c) =$

$(\alpha a - 3(\alpha\cdot b) + \alpha c, \alpha\cdot a - \alpha\cdot c) =$

$\alpha(a-3b+c, a-c) = \alpha\cdot T(a,b,c) = \boxed{\alpha\cdot T(\vec{u})}$

Com isso cumprimos as duas propriedades e provamos que T é uma transformação linear.

07. Dados $X, Y \in V$ duas matrizes de ordem n e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

(i) $\varphi_B(X+Y) = (X+Y)B - B(X+Y) = XB + YB - BX - BY =$

$$= XB - BX + YB - BY = \varphi_B(X) + \varphi_B(Y).$$

(ii) $\varphi_B(\alpha X) = (\alpha X)B - B(\alpha X) = \alpha(XB) - \alpha(BX) = \alpha(XB - BX) = \alpha\varphi_B(X).$

Logo, por (i) e (ii) segue que a transformação φ_B é linear.

8. Ache a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$; $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. Em seguida, obtenha $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (3,2)$.

Primeiramente, podemos notar que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é base canônica do $\mathbb{R}^3$. Assim escrevemos a combinação linear de um vetor (x,y,z) qualquer do $\mathbb{R}^3$, pondo

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$T(x,y,z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) =$

$x \cdot T(1,0,0) + y \cdot T(0,1,0) + z \cdot T(0,0,1)$

Pelas condições do problema temos:

$T(x,y,z) = x(2,0) + y(1,1) + z(0,-1) = (2x, 0; y, y; 0, -z) =$

$(2x+y; y-z)$

Agora vamos encontrar $\vec{v}$ a partir dos dados que já temos:

$T(\vec{v}) = (3,2)$, logo:

$[(2x+y), (y-z)] = (3,2)$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y - z = 2 \quad (2^o) \end{cases}$$

Isolando $y = 3 - 2x$ e,

Utilizando a 2^o equação:

$y - z = 2$

$(3-2x) - z = 2$

$3 - 2x - z = 2$

$-z = 2 - 3 + 2x$

$z = 1 - 2x$

Portanto:

$\vec{v} = [(x), (3-2x), (1-2x)]$

.

11) Observe que $\{(1,0,0); (1,1,0); (0,1,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$, pois é uma coleção de 3 vetores L.I. Por proposição, tem-se que existe uma única transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$L(1,0,0) = (3,0,0);\ L(1,1,0) = (3,3,0) \text{ e } L(0,1,1) = (0,3,3).$$

Assim, dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se que , representando-o como uma combinação linear da base dada, vem:

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(0,1,1),$$

obtendo

$$\begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ c=z \end{cases},$$

donde vem que $a = x - y + z$, $b = y - z$ e $c = z$. Logo,

$$(x,y,z) = (x-y+z)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(0,1,1).$$

Aplicando L, e observando que a mesma deve ser linear, vamos obter

$$L(x,y,z) = (x-y+z)L(1,0,0) + (y-z)L(1,1,0) + zL(0,1,1) =$$

$$= (x-y+z)(3,0,0) + (y-z)(3,3,0) + z(0,3,3) = (3x,3y,3z).$$

13) Obtenha a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $L(1,1,1) = (4,12)$; $L(1,1,0) = (0,4)$ e $L(1,0,0) = (1,3)$.

Temos os vetores $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$

Verificando se os vetores são base de $\mathbb{R}^3$:

$x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$$

L.I! Portanto é base de $\mathbb{R}^3$.

Determinando $L(x,y,z)$:

$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ a + b = y \\ a = z \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= z \\ b &= y - z \\ c &= x - y \end{aligned}$$

$(x,y,z) = (z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0))$

↳ Aplicando tudo isso em L:

$L(x,y,z) = z\,L(1,1,1) + (y-z)\,L(1,1,0) + (x-y)\,L(1,0,0)$

↳ Substituindo tudo isso pelos valores do enunciado:

$L(1,1,1) = (4,12)$, $L(1,1,0) = (0,4)$ e $L(1,0,0) = (1,3)$

Então:

$L(x,y,z) = z(4,12) + (y-z)(0,4) + (x-y)(1,3)$

$L(x,y,z) = (4z + 0y + 0z + x - y,\ 12z + 4y - 4z + 3x - y)$

$$\boxed{L(x,y,z) = (x - y + 4z,\ 3x + 3y + 8z)}$$

15) Seja $C = \{\vec{v} \in V \ : \ T(\vec{v}) = \vec{v}\}$. Como $T(\vec{0}) = \vec{0}$, segue que $C \neq \emptyset$, i.e., C está bem definido.

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in C$. Então, como T é linear e como $T(\vec{u}) = \vec{u}$ e $T(\vec{v}) = \vec{v}$, pois $\vec{u}, \vec{v} \in C$, segue que

(a) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$, e então $\vec{u} + \vec{v} \in C$;

(b) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}) = \alpha\vec{u}$, e então $\alpha\vec{u} \in C$.

Portanto, de (a) e (b) segue que C é um subespaço vetorial de V.

16. Sejam S e T os operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (0, x)$ e $T(x, y) = (x, 0)$. Mostre que $TS = 0$, mas que $ST \neq 0$. Mostre também que $T^2 = T$.

Sendo $S(x,y) = (0,x)$ e $T(x,y) = (x,0)$, então:

- $(S \circ T)(x,y) = S(T(x,y)) = S(x,0) = (0,x) \neq (0,0)$

mas

- $(T \circ S)(x,y) = T(S(x,y)) = T(0,x) = (0,0)$

Vamos mostrar que $T^2 = T$;

$T^2(x,y) = (T \circ T)(x,y) = T(T(x,y)) = T(x,0) = (x,0) = T(x,y)$.