Resolução de questões da Lista 10, feita por alunos.

② Seja $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definido por $G(x,y,z) = (2x + z, x - 4y - z)$. Ache a matriz da transformação $[T]^{\beta}_{\gamma}$ quando as bases forem:

b) $\beta = \{(1,1,1); (1,1,0); (-1,0,0)\}$ e γ a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

$G = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$G = (x, y, z) = (2x + z, x - 4y - z)$

$\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (-1,0;0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$\gamma = \{(1,0), (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

$G(1,1,1) = (2+1, 1-4-1) = (3,-4)$

$G(1,1,0) = (2+0, 1-4-0) = (2,-3)$

$G(-1,0,0) = (-2,-1)$

$(3,-4) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1)$

$(2,-3) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1)$

$(-2,-1) = a_{13}(1,0) + a_{23}(0,1)$

$\begin{cases} a_{11} + 0 = 3 \\ 0 + a_{21} = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{12} + 0 = 2 \\ 0 + a_{22} = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{13} + 0 = -2 \\ 0 + a_{23} = -1 \end{cases}$

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

4. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Ache T.

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

• $T(1,-1) = a_{11}(1,0,-1) + a_{21}(0,1,2) + a_{31}(1,2,0)$

$T(1,-1) = 1(1,0,-1) + 1(0,1,2) + 0(1,2,0)$

$T(1,-1) = (1,0,-1;\ 0,1,2;\ 0,0,0)$

$T(1,-1) = (1,1,1)$ ✓

• $T(0,2) = a_{12}(1,0,-1) + a_{22}(0,1,2) + a_{32}(1,2,0)$

$T(0,2) = 0(1,0,-1) + 1(0,1,2) + (-1)(1,2,0)$

$T(0,2) = (0,0,0;\ 0,1,2;\ -1,-2,0)$

$T(0,2) = (-1,-1,2)$ ✓

ou seja, $T(1,-1) = (1,1,1)$ e $T(0,2) = (-1,-1,2)$ ✓

Agora precisamos encontrar a aplicação T, então $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos:

Primeiramente:

$(x,y) = \alpha(1,-1) + \beta(0,2)$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ -\alpha + 2\beta = y \end{cases}$$

$-(x) + 2\beta = y$

$\beta = \frac{y+x}{2}$

, assim $\alpha = x$ e $\beta = \frac{y+x}{2}$ (*) ✓

Aplicando (*) a $T[(1,-1);(0,2)]$, obteremos:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= x \cdot T(1,-1) + y \cdot T(0,2) \\ &= x \cdot T(1,-1) + \frac{y+x}{2} \cdot T(0,2) \\ &= x(1,1,1) + \frac{y+x}{2}(-1,-1,2) \\ &= (x,x,x) + \left(\frac{-x-y}{2}, \frac{-x-y}{2}, \frac{2y+2x}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y\right) \end{aligned}$$

ok! ✓

b) Se $S(x,y) = (2x, x-y, x)$, ache $[S]^{\alpha}_{\beta}$.

$S(1,-1) = (2.-1,\ 1-(-1),\ 1) = (-2,2,1)$
$S(0,2) = (2.2,\ 0-2,\ 0) = (4,-2,0)$, segue que

escrevendo tais vetores como combinação linear de β.

$(-2,2,1) = a_{11}(1,0,-1) + a_{21}(0,1,2) + a_{31}(1,2,0)$
$(4,-2,0) = a_{12}(1,0,-1) + a_{22}(0,1,2) + a_{32}(1,2,0)$

Temos 2 sistemas lineares que serão resolvidos por regra de Cramer.

① $\begin{cases} a_{11} + a_{31} = -2 \\ a_{21} + 2a_{31} = 2 \\ -a_{11} + 2a_{21} = 1 \end{cases}$, cuja solução é:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\det A = 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-4) + 0 + 1(-(-1)) = \underline{-3}$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-4) + 1(4-1) = \underline{11}$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-2).\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.(-2) + 2(-(-2)) + 1.(-(-2)) = \underline{4}$

$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(1-4) - 0 - 2(-(-1)) = \underline{-5}$

$a_{11} = \dfrac{\det A_1}{\det A}$, $a_{21} = \dfrac{\det A_2}{\det A}$, $a_{31} = \dfrac{\det A_3}{\det A}$

$a_{11} = -\dfrac{11}{3}$, $a_{21} = -\dfrac{4}{3}$, $a_{31} = \dfrac{5}{3}$

② $\begin{cases} a_{12} + a_{32} = 4 \\ a_{22} + 2a_{32} = -2 \\ -a_{12} + 2a_{22} = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = -3$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(0-4) - 0 + 1(4-0) = \underline{-20}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.(0) - 4(+2) + 1.(-2) = \underline{-10}$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(0+4) - 0 + 4(0+1) = \underline{8}$$

$a_{12} = \dfrac{\det A_1}{\det A}$, $a_{22} = \dfrac{\det A_2}{\det A}$, $a_{32} = \dfrac{\det A_3}{\det A}$

$a_{12} = \dfrac{20}{3}$, $a_{22} = \dfrac{10}{3}$, $a_{32} = \dfrac{-8}{3}$

Assim, de ① e ②, a matriz transformação S na base α e β, será:

$$[S]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -13/3 & 20/3 \\ -4/3 & 10/3 \\ 5/3 & -8/3 \end{bmatrix} //$$

ⓒ Ache uma base γ tal que $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Do item ⓐ, temos:

$\alpha = \{(1,-1), (0,2)\}$

$$[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$\gamma = \{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)\}$

$T(1,-1) = a_{11}(\vec{v}_1) + a_{21}(\vec{v}_2) + a_{31}(\vec{v}_3)$
$T(0,2) = a_{12}(\vec{v}_1) + a_{22}(\vec{v}_2) + a_{32}(\vec{v}_3)$

A partir do item ⓐ, temos também que:
$T(1,-1) = (1,1,1)$ e $T(0,2) = (-1,-1,2)$, assim:
$(1,1,1) = 1(\vec{v}_1) + 0(\vec{v}_2) + 0(\vec{v}_3)$
$(-1,-1,2) = 0(\vec{v}_1) + 0(\vec{v}_2) + 1(\vec{v}_3)$

Portanto $\vec{v}_1 = (1,1,1)$ e $\vec{v}_3 = (-1,-1,2)$, o vetor $\vec{v}_2$ será qualquer vetor tal que a base $\gamma = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ seja L.I.

muito bom!

questão 10

(a) utilizando a base canonica de P_4 temos

$$\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$$

para demonstrar que de fato é uma base para P_4:

→ O conjunto é L.I uma vez que

$$\alpha_1 + \alpha_2 . t + \alpha_3 . t^2 + \alpha_4 . t^3 + \alpha_5 . t^4 = 0 + 0.t + 0.t^2 + 0.t^3 + 0.t^4$$

e que resulte em:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$$

→ O conjunto gera o espaço de polinomios de grau menor ou igual a 4, pois qualquer polinomio $\in P_4(\mathbb{R})$ pode ser escrito como

$$\beta_1 + \beta_2 . t + \beta_3 t^2 + \beta_4 . t^3 + \beta_5 . t^4$$

Portanto, $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ é uma base para P_4

A dimensão é dada por

$\dim P_n = n + 1$

$\dim P_4 = 4 + 1$

$\dim P_4 = 5$

b)

sejam $f_1, f_2 \in P_3$ dados por

$f_1(t) = \alpha_1 + \alpha_2 . t + \alpha_3 . t^2 + \alpha_4 . t^3$

$f_2(t) = \beta_1 + \beta_2 . t + \beta_3 . t^2 + \beta_4 . t^3$

como P_4 é o espaço vetorial dos polinomios de grau menor ou igual a 4, temos que $P_3 \subset P_4$, logo, P_3 será um subespaço de P_4 se se cumprir

(I) $f_1(t) + f_2(t) \in P_3$ sendo $\gamma \in \mathbb{R}$

(II) $\gamma . f_1(t) \in P_3$

(I) $f_1(t) + f_2(t) = \alpha_1 + \alpha_2 . t + \alpha_3 . t^2 + \alpha_4 . t^3 + \beta_1 + \beta_2 . t + \beta_3 . t^2 + \beta_4 . t^3$

$f_1(t) + f_2(t) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) . t + (\alpha_3 + \beta_3) . t^2 + (\alpha_4 + \beta_4) . t^3$

logo, a soma $\in P_3$

(II) $\gamma . f_1(t) = \gamma . (\alpha_1 + \alpha_2 . t + \alpha_3 . t^2 + \alpha_4 . t^3)$

$\gamma . f_1(t) = \gamma \alpha_1 + \gamma . \alpha_2 . t + \gamma . \alpha_3 . t^2 + \gamma . \alpha_4 . t^3$

logo, $\gamma . f_1(t) \in P_3$

por (I) e (II) temos que <u>P_3 é um subespaço de P_4</u>

muito bom!

(c)

$D: P_4 \to P_4$ e com a base $\beta = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

$D f(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$

$D(1) = a_{11}.1 + a_{21}.t + a_{31}.t^2 + a_{41}.t^3 + a_{51}.t^4$

$0 = a_{11} + a_{21}.t + a_{31}.t^2 + a_{41}.t^3 + a_{51}.t^4 = 0 + 0.t + 0.t^2 + 0.t^3 + 0.t^4$

obtemos:

$a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{51} = 0$

$D(t) = a_{12}.1 + a_{22}.t + a_{32}.t^2 + a_{42}.t^3 + a_{52}.t^4$

$1 = a_{12} + a_{22}.t + a_{32}.t^2 + a_{42}.t^3 + a_{52}.t^4 = 1 + 0.t + 0.t^2 + 0.t^3 + 0.t^4$

obtemos

$a_{12} = 1$ e $a_{22} = a_{32} = a_{42} = a_{52} = 0$

$D(t^2) = a_{13}.1 + a_{23}.t + a_{33}.t^2 + a_{43}.t^3 + a_{53}.t^4$

$2t = a_{13} + a_{23}.t + a_{33}.t^2 + a_{43}.t^3 + a_{53}.t^4 = 0 + 2.t + 0.t^2 + 0.t^3 + 0.t^4$

obtemos

$a_{23} = 2$ e $a_{13} = a_{33} = a_{43} = a_{53} = 0$

$D(t^3) = a_{14}.1 + a_{24}.t + a_{34}.t^2 + a_{44}.t^3 + a_{54}.t^4$

$3t^2 = a_{14} + a_{24}.t + a_{34}.t^2 + a_{44}.t^3 + a_{54}.t^4 = 0 + 0.t + 3.t^2 + 0.t^3 + 0.t^4$

obtemos

$a_{34} = 3$ e $a_{14} = a_{24} = a_{44} = a_{54} = 0$

$D(t^4) = a_{15}.1 + a_{25}.t + a_{35}.t^2 + a_{45}.t^3 + a_{55}.t^4$

$4t^3 = a_{15} + a_{25}.t + a_{35}.t^2 + a_{45}.t^3 + a_{55}.t^4 = 0 + 0.t + 0.t^2 + 4.t^3 + 0.t^4$

obtemos

$a_{45} = 4$ e $a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{55} = 0$

Agora, organizando os a_{ij} na matriz, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [D]_{\beta}^{\beta}$$

como a matriz possui uma linha nula tem-se que $\det[D] = 0$

portanto a matriz $[D]$ não é invertível, logo $D: P_4 \to P_4$

não é um isomorfismo

d) O operador D é injetivo?

D é injetivo só se, $Ker\,D = \{\vec{0}\}$

O nucleo de D é dado por

$$Ker\,D = \{f(t) \in P_4 : D(\underbrace{f(t)}_{f(t)'}) = 0\}$$

ou

$$Ker\,D = \{f(t) \in P_4 \text{ e } a \in \mathbb{R} : f(t) = a\}$$

↳ a é uma constante

ou seja,

o nucleo de D corresponde a o subespaço vetorial de todos os polinomios constantes, pois a derivada de uma função constante é a função nula.

logo, como $Ker\,D \neq \{\vec{0}\}$ então D não é injetivo.

C