Resolução de questões da Lista 09, feita por alunos.

(02) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$

a) Determine o núcleo e imagem de T e suas dimensões.

núcleo de T

$Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} 2x = 0 \to x = 0 \\ 4x - y = 0 \to 4.0 - y = 0 \to y = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \to 2.0 + 3.0 - z = 0 \to z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{Ker(T) = \{(0,0,0)\}}$

logo $\boxed{\dim Ker\, T = 0}$

imagem de T

$Im(T) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \exists \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{v}) = \vec{w}\}$

$Im(T) = \{(2x, 4x-y, 2x+3y-z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(2,4,2) + y(0,-1,3) + z(0,0,-1)\}$

$= [\underset{a}{(2,4,2)}, \underset{b}{(0,-1,3)}, \underset{c}{(0,0,-1)}]$

Como os três vetores são L.I. (possível de verificar visualmente b e c não possuem x não há como formar um deles usando a, e também não há como formar a)

$\therefore$ $\boxed{Im(T) = [(2,4,2),(0,-1,3),(0,0,-1)]}$

$\boxed{\dim Im(T) = 3}$

$\dim Ker(T) + \dim Im(T) = 0 + 3 = \dim \mathbb{R}^3$

b) Calcule $T^2 = T \circ T$

$T \circ T = T(T(x,y,z)) = T(2x, 4x-y, 2x+3y-z)$

$= 2.(2x), 4.(2x)-(4x-y), 2.(2x)+3(4x-y)$

$-(2x+3y-z) = (4x, 8x-4x+y, 4x+12x-3y$

$-2x-3y+z)$

$T \circ T = (4x, 4x+y, 14x-6y+z)$

3. Obtenha o núcleo, a imagem e suas dimensões, da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$; $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$.

Primeiramente precisamos encontrar a transformação linear correspondente

Podemos notar que $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ é base canônica do $\mathbb{R}^3$, segue que:

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$T(x,y,z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1))$

$T(x,y,z) = x.T(1,0,0) + y.T(0,1,0) + z.T(0,0,1)$

$x(2,0) + y(1,1) + z(0,-1)$

$(2x,0; y,y; 0,-z)$

$(2x+y ; y-z)$

$Ker\,T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0)\}$

e segue que o núcleo de T consiste na solução do sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad y=z \qquad 2x+(z)=0 \qquad 2x=-z \qquad x=\frac{-z}{2}$$

Portanto, $Ker\,T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -\frac{z}{2} \text{ e } y = z\} = \{(-\frac{z}{2}, z, z)\, z \in \mathbb{R}\} = \{z(-\frac{1}{2}, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\} = [(-\frac{1}{2}, 1, 1)]^2$, ou seja,

Ker T é o subespaço gerado pelo vetor $(-1/2, 1, 1)$. Como um único vetor não nulo é L.I, temos que dim Ker T $= 1$.

Encontrando a imagem e dimensões de T.

$Im(T) = \{(2x+y, y-z): x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(2,0), y(1,1), z(0,-1)\} = [(2,0),(1,1),(0,-1)]$.

Como estamos lidando com uma coleção de vetores do $\mathbb{R}^2$, certamente um deles é combinação linear dos demais, ou seja, são L.D.

$(1,1) = \alpha(2,0) + \beta(0,-1)$ — * vetor escolhido por método de tentativa.

$2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2$

$-\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1$

Assim, o vetor $(1,1)$ pode ser descartado se os vetores resultantes forem L.I, verifiquemos:

$\alpha(2,0) + \beta(0,-1) = (0,0)$

$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$-\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$, são L.I, pois $\alpha = \beta = 0$

Então $[(2,0),(0,1)] = Im\,T$. Logo, concluímos que $\dim Im\,T = 2$, e, $\dim Ker\,T + \dim Im\,T = 1 + 2 = 3$.

5. Sejam F e G operadores lineares de um espaço vetorial V. Mostre que $\ker G \subset \ker(F \circ G)$. Dê um exemplo onde vale a igualdade.

Sejam $F, G: V \to V$.

Para mostrar que $\ker G \subset \ker(F \circ G)$:

Dado $\vec{u} \in \ker G$, qualquer, precisamos mostrar que $\vec{u} \in \ker(F \circ G)$.

De fato;

$$(F \circ G)(\vec{u}) = F(G(\vec{u})) = F(\vec{0}) = \vec{0}$$

pois $\vec{u} \in \ker G$

por F ser linear.

$\Rightarrow \vec{u} \in \ker(F \circ G)$.

Isto mostra que $\ker G \subset \ker(F \circ G)$

A parte do exemplo com IGUALDADE fica como exercício.

10) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$.

(a) Determine uma base do núcleo de T.

Primeiro vamos encontrar o núcleo de T.

$\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z, x-y, -z) = (0,0,0)\}$

segue que

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

donde

$z = 0$ e $x = y$

Portanto,

$\ker T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ e } z = 0\}$

$\ker T = \{(0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

$\ker T = \{x(0,1,0) : x \in \mathbb{R}\}$

Assim, temos que

$\ker T = [(0,1,0)]$

Resposta (a):

Base de $\ker T$ é dada por $[(0,1,0)]$.

E como um único vetor não nulo é L.I. segue que $\dim \ker T = 1$

(b) Dê a dimensão da imagem de T.

Aplicando o Teorema 4.15 temos que

$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^3$

$1 + \dim \operatorname{Im}(T) = 3$

$\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ //

(c) T é sobrejetora?

Justifique

Para que T seja sobrejetora precisamos que $Im(T)$ seja igual ao contradomínio $\mathbb{R}^3$, ou seja

$$Im(T) = \mathbb{R}^3$$

contudo,

$$\dim Im(T) = 2$$

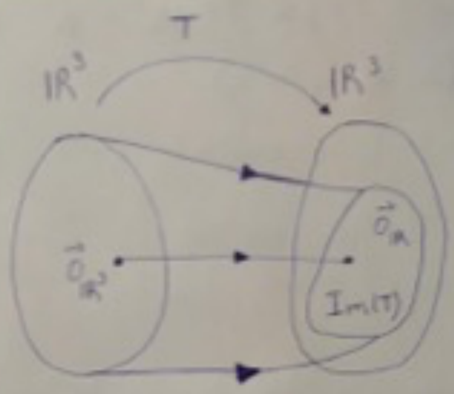
e

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Logo, T <u>não</u> é sobrejetora

(d) Faça um desenho para $ker(T)$ e $Im(T)$

Segue abaixo a imagem de $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



12. (Sel. Mestrado UFRGS 2016/1) Dados V, W espaços vetoriais sobre um corpo[1] $\mathbb{K}$ e $A : V \to W$ um isomorfismo, mostre que a aplicação $\varphi : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(W)$ dada por $\varphi(B) = ABA^{-1}$ define um isomorfismo linear entre $\mathcal{L}(V)$ e $\mathcal{L}(W)$.

Para demostrar isso, temos que comprovar que φ é linear e sobrejetora.

*Demostrar que φ é linear;

para isto tem que se cumprir I e II

(I) $\varphi(F+G) = \varphi(F) + \varphi(G)$

(II) $\varphi(\alpha . F) = \alpha . \varphi(F)$

sendo $F, G \in \mathcal{L}(V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

I $\varphi(F+G) = A.(F+G).A^{-1}$

$= A.((F+G).A^{-1}) = A.(F.A^{-1} + G.A^{-1})$

$= A.F.A^{-1} + A.G.A^{-1}$

$= \varphi(F) + \varphi(G)$

II $\varphi(\alpha . F) =$

$= A.(\alpha . F).A^{-1}$

$= (A.\alpha).F.A^{-1}$

$= (\alpha . A).F.A^{-1}$

$= \alpha(A.F.A^{-1})$

$= \alpha . \varphi(F)$

logo, φ é linear.

Demostrar que Ψ é bijetora.

↳ demostrar que é injetiva

Ψ será injetiva se, e somente se, $\operatorname{Ker}\Psi = \{\vec{0}\}$

temos:

$$\operatorname{Ker}\Psi = \{T \in \mathcal{L}(V) : \Psi(T) = 0\}$$

$$= \{T \in \mathcal{L}(V) : A.T.A^{-1} = 0\}$$

$$= \{T \in \mathcal{L}(V) : \underbrace{A^{-1}.A}_{I}.T.A^{-1} = \underbrace{A^{-1}.0}_{=0}\}$$

$$= \{T \in \mathcal{L}(V) : T.\underbrace{A^{-1}.A}_{I} = 0.A\}$$

$$= \{T \in \mathcal{L}(V) : T = 0\}$$

$\operatorname{Ker}\Psi = \{\vec{0}\}$

logo, Ψ é injetiva

4. Demostrar que φ é sobrejetiva.

para isto, temos que mostrar que

$\forall\, S \in \mathcal{L}(W),\ \exists\ T\, \mathcal{L}(V)$ tal que.

$$\varphi(T) = S$$

temos que $T = A^{-1}.S.A$

então:

$$\varphi(T) = \varphi(A^{-1}.S.A)$$

$$= A(A^{-1}.S.A).A^{-1} = (A.A^{-1}).S.(A.A^{-1})$$

$$= I.S.I$$

$$= S$$

temos que φ é tambem sobrejetiva, portanto φ é bijetora e define um isomorfismo Linear entre $\mathcal{L}(V)$ e $\mathcal{L}(W)$