Resolução de questões da lista 09, feita por alunos.

2

Vamos supor, sem perda de generalidade, que a função $f: X \to \mathbb{R}$ é crescente, e $a \in X'_+$. Tomamos também a sequência $(x_n) \subset X$ com $x_n > a$, $\forall n \geq N$, $x_n \to a$ e $f(x_n) \to L$, e vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

Primeiramente, iremos mostrar que o conjunto $A = \{f(x) : x > a\}$ é limitado inferiormente. De fato, se A não fosse limitado inferiormente, então $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, pela hipótese de f ser crescente. Mas então, $\forall (y_n) \subset X$ com $y_n > a$ e $y_n \to a$, teríamos que $f(y_n) \to -\infty$, o que é um absurdo com a hipótese de que $f(x_n) \to L$. Portanto, como f é crescente e limitada inferiormente no conjunto X, segue, por Teorema, que existe o limite lateral à direita do ponto a, i.e., $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L'$. Com isso, pela definição de Heine para o limite de uma sequência é único, concluímos que $L' = L$.

Logo, mostramos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

(4) Prove que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ e que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Dado $M > 0$, basta encontrarmos $N > 0$ de forma que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > N$ implique em $e^x > M$.

Tome $N = \ln(M+1) > 0$, pois desta forma, como e^x é função crescente, temos que $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x > N$, temos:

$$f(x) = e^x > e^N = e^{\ln(M+1)} = M + 1 > M \Rightarrow e^x > M.$$

Portanto, mostramos que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Da mesma forma, dado $0 < \varepsilon < 1$, basta encontrar $N > 0$ de modo que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < -N$ implique em $|e^x - 0| < \varepsilon$.

Basta tomar $N = -\ln(\varepsilon) > 0$, e dessa forma, $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x < -N$ temos

$$|f(x) - 0| = e^x < e^{-N} = e^{\ln(\varepsilon)} = \varepsilon.$$

Portanto, mostramos que $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

10,

6- Provar que $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{2x+5} = \frac{3}{2}$

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x+1}{2x+5}$ e que $X = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

Vamos mostrar que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{3}{2}$. Para isso, mostraremos que $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0$ tal que $\forall x \in X$ com $x < -M$ implique em $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

Avaliando a diferença,

$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right|$:

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3x+1}{2x+5} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3x+1) - 3(2x+5)}{2x+5}\right| = \left|\frac{-13}{2x+5}\right|$$

$$= \frac{13}{|2x+5|}.$$

Dado $\varepsilon > 0$. Para que $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$, é suficiente que:

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \frac{13}{|2x+5|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{13}{|2x+5|} \leq \frac{13}{|2x| - |5|} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$2|x| - 5 > \frac{13}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{13}{2\varepsilon} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{13}{2\varepsilon} - \frac{5}{2}.$$

Isto é, tomando $M = \frac{13}{2\varepsilon} + \frac{5}{2}$, desta forma,

$\forall x \in X$ com $x < -M$, teremos:

$$\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| = \frac{13}{|2x+5|} < \varepsilon$$

Assim, de acordo com os passos descritos, concluímos que $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{2x+5} = \frac{3}{2}$. □

⑦ Seja $a > 0$, será provado que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + a^x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Para isso será considerado os dois casos:

(i) Se $a > 1$, será preciso mostrar que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x < -M$ tem-se que $|a^x + 1 - 1| = |a^x| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon \in (0,1)$. Logo, basta tomar $M = -\log_a \varepsilon > 0$. Assim, lembrando que a função a^x é crescente quando $a > 1$, então $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x < -M$ tem-se:

$a^x < a^{-M} = a^{\log_a \varepsilon} = \varepsilon$

Portanto, foi mostrado que

$$\lim_{x \to -\infty} (a^x + 1) = 1 \text{ quando } a > 1.$$

(ii) Se $0 < a < 1$, será preciso mostrar que $\forall N > 0 \; \exists M > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x < -M$ implique em $a^x + 1 > N$.

Sendo $N > 0$, logo, basta tomar $M = \log_a \frac{1}{N+1} > 0$ (pois $0 < a < 1$). Também, lembrando que a função a^x é decrescente quando $0 < a < 1$, então $\forall x \in \mathbb{R}$ com $x < -M$, tem-se:

$a^x + 1 > a^{-M} + 1 = a^{-\log_a \frac{1}{N+1}} + 1 = a^{\log_a (N+1)} + 1 = N + 2 > N$.

Portanto foi concluído que, $\lim_{x \to -\infty} (a^x + 1) = +\infty$

3) Prove que $\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim_{x \to +\infty} g(x)$

$\exists \lim f(x) = L_1$ e $\exists \lim_{x \to +\infty} g(x) = L_2$ e que

$f(x) \leq g(x), \ \forall x \in (a, +\infty)$

Prove que $L_1 \leq L_2$. dado $\varepsilon > 0$

1 => como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1$, $\exists M_1 > 0$ tal que

$\forall x > M_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon \quad (*)$

2 => como $\lim_{x \to \infty +} g(x) = L_2$, $\exists M_2 > 0$ tal que

$\forall x > M_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon \quad (**)$

Tomo $M = \max\{M_1, M_2\}$. Assim $\forall x > M$ valem $(*)$ e $(**)$

$|f(x) - L_1| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - L_1 < \varepsilon$

$L_1 - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + L_1$

$L_2 - \varepsilon < g(x) < \varepsilon + L_2$

$L_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < \varepsilon + L_2$

$L_1 - \varepsilon < \varepsilon + L_2$

$L_1 < L_2 + 2\varepsilon \quad , \ \forall \varepsilon > 0$

Então $L_1 \leq L_2$ //

Como queríamos.

(15) a) Seja $f:(a,+\infty) \to \mathbb{R}$. Defina precisamente o significado de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Por definição temos que:
$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tal que, $\forall x > M \to |f(x) - L| < \varepsilon$.

b) Prove que se $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ e $\lim_{x \to \infty} g(x) = B$,

então $\lim_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = A + B$

Dado $\varepsilon > 0$.
Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$, segue que $\exists M_1 > 0$ tal

que $\forall x > M_1 \to |f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (*)

Como $\lim_{x \to +\infty} g(x) = B$, segue que $\exists M_2 > 0$ tal

que, $\forall x > M_2 \to |g(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (**)

Tomando $M = \max\{M_1, M_2\}$. Assim $\forall x > M$ valem (*) e (**) e disso temos:
$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| = |f(x) - A + g(x) - B| \leq$
$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Assim, concluímos que dado $\varepsilon > 0$ obtivemos um $M > 0$, implicando em
$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| = |f(x) - A + g(x) - B| < \varepsilon$,
o que prova que
$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = A + B$, como queríamos demonstrar.

15) a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tal que, $\forall x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

b) Dado $\varepsilon > 0$

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$, $\exists M > 0$

tal que $\forall x > M_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(*)$

Como o $\lim_{x \to +\infty} g(x)$, $\exists M_2 > 0$, tal que,

$\forall x > M_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(**)$

Tome $M = \max\{M_1, M_2\}$

Assim $\forall x > M$ valem $*$ e $**$

Avaliar $|f(x) + g(x) - (A+B)| \leq$

$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$

Tomando $M = \max\{M_1, M_2\}$. Assim $\forall x > M$ valem $(*)$ e $(**)$ e disso temos:

$|f(x) + g(x) - (A+B)| = |f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Assim, concluímos que dado $\varepsilon > 0$ obtivemos um $M > 0$, implicando em $|(f(x) + g(x)) - (A+B)| = |f(x) - A + g(x) - B| < \varepsilon$, o que prova que

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = A + B$, como queríamos demonstrar.