Resolução de algumas questões da Lista 08
(feitas pelos alunos)

1) Usando a definição de limite, prove que:

(a) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ (b) $\lim_{x \to 4} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$

Vamos avaliar a diferença $|x^2 - 4|$:

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2|.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, vamos tomar $\delta < 1$, pois dessa forma, se $0 < |x-2| < \delta < 1$, então:

$$|x-2| < 1 \Rightarrow |x+2-4| < 1 \Rightarrow |x+2| - 4 <$$
$$< |x+2-4| < 1 \Rightarrow |x+2| < 5.$$

Além disso, para termos $|x^2-4| < \varepsilon$, para $|x-2| < 1$, é necessário que:

$$|x^2-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Portanto, tomando $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$, então $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x-2| < \delta$, temos que:

$$|x^2-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < 5\delta \leq 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Portanto, mostramos que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

3.

Vamos supor que o $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então dado $\varepsilon > 0$ temos que:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in X, \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Portanto,

$\forall x \in X$, $0 < |x-a| < \delta$, assim temos o seguinte:

$$|-f(x) - (-L)| = |-f(x) + L| = |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |-f(x) - (-L)| < \varepsilon.$$

Sendo assim,

$$\lim_{x \to a} [-f(x)] = -L.$$

5- De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$ para termos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < |x| < \delta$ implique em:

$$|f(x)| = |x| < \delta = \varepsilon.$$

Isto é, temos que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. C

~~Agora, dado que~~

Agora, dado $a \neq 0$, vamos tomar as sequências $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e $(y_n) \subset \mathbb{I}$ tais que $x_n \to a$ e $y_n \to a$ com $x_n \neq a$ e $y_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Essas sequências existem pelas propriedades de densidade dos números racionais e irracionais sobre os números reais. Entretanto, note que:

$$f(x_n) = x_n \to a \quad e \quad f(y_n) = -y_n \to -a \neq a$$

C

Portanto, construímos duas sequências $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ tais que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to \infty} f(y_n)$, logo pela definição de Heine para o limite de uma função, segue que $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ se $a \neq 0$.

7. Sejam $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X \setminus \{a\})$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, mostre que $L \in \overline{Y}$.

Sejam $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X \setminus \{a\})$. Suponha que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então pela definição de Heine para o limite de uma função, temos que:

$\forall (x_n) \subset X : x_n \to a$ e $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que $f(x_n) \to L$.

Logo, dado que $(x_n) \subset X : x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$, e, com isso, temos que $(f(x_n)) \subset f(X \setminus \{a\}) = Y$.

Logo, como temos que $(f(x_n)) \subset Y$ e $f(x_n) \to L$, pelo definição de ponto aderente de um conjunto temos que $L \in \overline{Y}$.

8) Use a definição de limite para provar que
$$\lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$
Em seguida, use o Teorema do Sanduíche para provar o mesmo limite acima.

• Seja $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f: X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $\forall x \in X$. Vamos mostrar que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Para isso, basta mostrarmos que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in X$ com $0 < |x - 0| < \delta$ temos $|f(x) - 0| < \varepsilon$.
Logo, vamos avaliar a diferença $|f(x) - 0|$:
$$|f(x) - 0| = \left| x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$
Portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon > 0$ para que $\forall x \in X$ com $0 < |x| < \delta$ temos que:
$$|f(x) - 0| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$
Portanto, temos que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

• Usando o TEOREMA do SANDUÍCHE, notamos que $\forall x \in X$, temos:
$$0 \leq \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left| x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$
E como $\lim_{x \to 0} |x| = \lim_{x \to 0} 0$, pelo TEOREMA do SANDUÍCHE, segue que:
$$\lim_{x \to 0} \left| x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

9.

Vamos supor que $\forall x$ vale $|g(x)| \leq x^4$, note que:

$$0 \leq \left|\frac{g(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x}\right| \Rightarrow 0 \leq \left|\frac{g(x)}{x}\right| \leq |x^3|.$$

O teorema do sanduíche diz que:

$$\lim_{x \to 0} \left|\frac{g(x)}{x}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$$

C

E como $\lim\limits_{x \to 0} |x^3| = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$, logo,

pelo teorema do sanduíche concluímos.

Dividiste por $|x| \neq 0$. A tua "sorte" foi que $|x^4| = x^4$, e o procedimento então vale.

11) Seja $a \in A'$ e sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$.

Suponha que $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e que $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$. Vamos mostrar que $L_1 \leq L_2$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, então $\exists \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

i.e.,

$$\frac{\varepsilon}{2} - L_1 < f(x) < \frac{\varepsilon}{2} + L_1, \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1. \qquad (*)$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, então $\exists \delta_2 > 0$ tal que,

$$\forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2},$$

i.e.,

$$L_2 frac\varepsilon 2 < g(x) < L_2 + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ sempre que } 0 < |x-a| < \delta_2. \qquad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x \in A$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$. Como por hipótese $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$, usando $(*)$ e $(**)$, temos $\forall x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$:

$$L_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \leq g(x) < L_2 + \frac{\varepsilon}{2},$$

i.e.,

$$L_1 < L_2 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

ou seja,

$$L_1 \leq L_2,$$

como queríamos mostrar.