

Resolução de exercícios da Lista 07 - feita pelos alunos.

01) b) $\beta = \{(1, 2); (2, 1)\}$

- mostrar que β é uma base de \mathbb{R}^2
- determinar as coordenadas do vetor $\vec{u} = (6, 2)$ em relação a β .

Para β ser uma base, os vetores precisam ser L.I. e todos os vetores de \mathbb{R}^2 podem ser escritos como uma combinação linear dos vetores de β .

$$a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2 = 0$$

$$a(1, 2) + b(2, 1) = 0$$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \quad a = -2b$$

$$\hookrightarrow 2(-2b) + b = 0 \quad a = -2 \cdot 0$$

$$-4b + b = 0 \quad a = 0$$

$$-3b = 0$$

$$b = 0$$

os
vetores
são
L.I.

$$(x, y) = a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2$$

$$(x, y) = a \cdot (1, 2) + b \cdot (2, 1)$$

$$(x, y) = (a + 2b, 2a + b)$$

Logo, qualquer vetor (x, y) pode ser escrito como combinação linear de \vec{u}_1 e \vec{u}_2 .

β é uma base de \mathbb{R}^2 ✓

$$\vec{u} = (6, 2)$$

$$\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

$$(6, 2) = a(1, 2) + b(2, 1)$$

$$\begin{cases} a + 2b = 6 & \rightarrow a = 6 - 2b \\ 2a + b = 2 & \downarrow \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 2 \cdot (6 - 2b) + b = 2$$

$$12 - 4b + b = 2$$

$$12 - 3b = 2$$

$$a = b = 10/3$$

$$a = 6 - 2 \cdot \frac{10}{3}$$

$$a = 6 - \frac{20}{3}$$

$$a = \frac{-2}{3}$$

Logo $10/3$ e $-2/3$ são as coordenadas de \vec{u} em β

$$(6, 2) = \frac{-2}{3}(1, 2) + \frac{10}{3}(2, 1)$$

$$(6, 2) = \left(\frac{-2}{3} + \frac{20}{3}, \frac{-4}{3} + \frac{10}{3}\right)$$

$$(6, 2) = (6, 2)$$

$$[\vec{u}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

1) Mostre que cada conjunto a seguir é uma base para \mathbb{R}^2 . Em seguida, determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = (6, 2)$ em relação a cada uma das bases dadas.

$$a) \mathcal{B} = \{(0, 1); (1, 0)\}$$

Verificando se $\{(0, 1); (1, 0)\}$ é base de \mathbb{R}^2 :

Primeiro vemos se é L.I.:

$$x(0, 1) + y(1, 0) = (0, 0)$$

$$0 + y = 0$$

$$y = 0$$

$$x + 0 = 0$$

$$x = 0$$

É L.I.!

Agora vamos verificar se $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \mathbb{R}^2$. Então:

$$\vec{v} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$$

$$(x, y) = \alpha(0, 1) + \beta(1, 0)$$

$$(x, y) = (\beta, \alpha)$$

$$x = \beta \quad \text{e} \quad y = \alpha$$

Portanto os vetores $\vec{u}_1 = (0, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0)$ formam uma base para o \mathbb{R}^2 .

Agora iremos determinar as coordenadas do vetor $\vec{u} = (6, 2)$

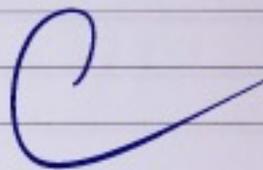
Como os vetores $(0, 1)$ e $(1, 0)$ são base para \mathbb{R}^2 , então:

$$(6, 2) = y(0, 1) + x(1, 0)$$

$$(6, 2) = (x, y)$$

$$x = 6$$

$$y = 2$$



$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Quais são as coordenadas de $\vec{u} = (1, 0, 0)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1); (-1, 1, 0); (1, 0, -1)\}$$

do \mathbb{R}^3 ?

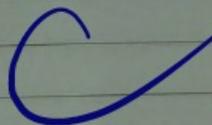
02. Combinação Linear de \mathcal{B}

$$\vec{u} = (1, 0, 0) = a(1, 1, 1) + b(-1, 1, 0) + c(1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} a - b + c = 1 & a + a + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ a + b = 0 & a = -b \\ a - c = 0 & a = c & b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{3}$$

$$\text{Então } [\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$



04. Como são três vetores em \mathbb{R}^3 , para verificar se formam uma base basta verificar se são L.I. Escrevendo a combinação linear

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0,$$

montamos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ 6\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \end{cases},$$

o qual possui $\alpha = \beta = \gamma = 0$ como solução geral. Logo, v_1, v_2 e v_3 são L.I. e, portanto, formam uma base para \mathbb{R}^3 . Denotemos por $\theta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal base.

Dado, $v = (3, 7, 1)$, então, escrevendo-o como uma combinação linear na base θ , vamos obter

$$(3, 7, 1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3,$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\gamma = 3 \\ 6\alpha + 5\beta + \gamma = 7 \\ 3\alpha + 4\beta + 7\gamma = 1 \end{cases},$$

obtendo $\alpha = -\frac{1}{5}$, $\beta = \frac{9}{5}$ e $\gamma = -\frac{4}{5}$, ou seja,

$$(3, 7, 1) = -\frac{1}{5}(2, 6, 3) + \frac{9}{5}(1, 5, 4) - \frac{4}{5}(-2, 1, 7),$$

e então as coordenadas de $(3, 7, 1)$ na base θ serão dadas por

$$[(3, 7, 1)]_{\theta} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

8) Ache a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ para a base canônica do \mathbb{R}^3 .

Considerando que a base canônica do \mathbb{R}^3 é dada por $\alpha = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$, o objetivo da questão é encontrar

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para tanto, vamos denotar $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ e $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Assim, temos que

$$\vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + a_{31}\vec{v}_3 \quad (\text{I})$$

$$\vec{u}_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{32}\vec{v}_3 \quad (\text{II})$$

$$\vec{u}_3 = a_{13}\vec{v}_1 + a_{23}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3 \quad (\text{III})$$

A partir de (I) vem

$$(1, 1, 0) = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(0, 0, 1) \quad |$$

$$(1, 1, 0) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

Assim, $a_{11} = 1$, $a_{21} = 1$,

$$a_{31} = 0.$$

De (II) vem que

$$(0, 1, 0) = a_{12}(1, 0, 0) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 0) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

segue que $a_{12} = 0$,

$$a_{22} = 1, \quad a_{32} = 0.$$

De (III) vem que

$$(0, 0, 3) = a_{23}(1, 0, 0) + a_{23}(0, 1, 0) + a_{33}(0, 0, 1)$$

$$(0, 0, 3) = (a_{23}, a_{23}, a_{33})$$

donde segue que $a_{23} = 0$,
 $a_{23} = 0$, $a_{33} = 3$.

Portanto a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$ de mudança da base β para a base α é dada por

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



10. No espaço \mathbb{R}^3 consideremos as bases $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ (canônica) e $\gamma = \{g_1, g_2, g_3\}$ relacionadas da seguinte maneira:

$$g_1 = e_1 + e_3$$

$$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$$

$$g_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Determinar as matrizes de mudança de base de β para γ e de γ para β .

$$\beta = \{e_1, e_2, e_3\} \quad \gamma = \{g_1, g_2, g_3\}$$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$g_1 = e_1 + e_3$$

$$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$$

$$g_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$g_2 = 2(e_1) + e_2 + e_3$$

$$g_2 = 2(1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$$

$$g_2 = (2, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$$

$$g_1 = e_1 + e_3$$

$$g_1 = (1, 0, 0) + (0, 0, 1)$$

$$g_2 = (2, 1, 1)$$

$$g_1 = (1, 0, 1)$$

$$g_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

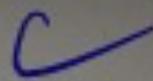
$$g_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$$

$$g_3 = (1, 1, 1)$$

$$\gamma = \{(1, 0, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Determinar $[I]_r^B$



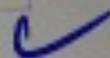
$$e_1 = a_{11} \cdot g_1 + a_{21} \cdot g_2 + a_{31} \cdot g_3$$

$$(L, 0, 0) = a_{11}(L, 0, 1) + a_{21}(2, L, L) + a_{31}(1, L, 1)$$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} + a_{31} = L \\ a_{21} + a_{31} = 0 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0 \end{cases}$$

$$a_{11} + 0 = 0$$

$$a_{11} = 0$$



Subtrair a 2ª da 1ª

$$0 + 2a_{21} + a_{31} = L$$

$$-a_{21} - a_{31} = 0$$

$$a_{21} = L$$

$$a_{21} + a_{31} = 0$$

$$L + a_{31} = 0$$

$$a_{31} = -L$$

$$e_2 = a_{12} \cdot g_1 + a_{22} \cdot g_2 + a_{32} \cdot g_3$$

$$(0, L, 0) = a_{12}(1, 0, 1) + a_{22}(2, L, L) + a_{32}(1, L, 1)$$

$$\begin{cases} a_{12} + 2a_{22} + a_{32} = 0 \\ a_{22} + a_{32} = L \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0 \end{cases}$$

$$a_{12} + L = 0$$

$$a_{12} = -L$$

Subtrair a 3ª da 1ª

$$a_{12} + 2a_{22} + a_{32} = 0$$

$$-a_{12} - a_{22} - a_{32} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$$0 + a_{32} = L$$

$$a_{32} = L$$



$$e_3 = a_{13} \cdot g_1 + a_{23} \cdot g_2 + a_{33} \cdot g_3$$

$$(0, 0, 1) = a_{13} \cdot (1, 0, 1) + a_{23} \cdot (2, 1, 1) + a_{33} \cdot (1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1 \end{cases}$$

$$a_{13} + 0 = 1$$

$$a_{13} = 1$$

Subtraindo a 3ª da 2ª

$$-1 + a_{33} = 0$$

$$a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0$$

$$a_{33} = 1$$

$$-a_{13} - a_{23} - a_{33} = -1$$

$$a_{23} = -1$$

Conforme os a_{ij} que achamos, temos:

$$[I]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[I]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz de mudan\u00e7a de base de } \beta \text{ para } \gamma.$$

$$\text{Como } \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix}_{\beta}^{\gamma} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix}_{\gamma}^{\beta}$$

para determinar a matriz de mudança de base de γ para β vamos achar a matriz inversa de $\begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix}_{\gamma}^{\beta}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} l_2 \leftrightarrow l_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$l_3 \rightarrow l_3 + l_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} l_2 \leftrightarrow l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$l_3 \rightarrow l_3 + l_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} l_1 + l_2 + l_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Logo, temos que a matriz de mudança de base de γ para β é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix}_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C