Resolução de exercícios da Lista 07 - feita pelos alunos.

01) b) $\beta = \{(1,2); (2,1)\}$

- mostrar que β é uma base do $\mathbb{R}^2$
- determinar as coordenadas do vetor $\vec{u} = (6,2)$ em relação a β.

Para β ser uma base, os vetores precisam ser L.I. e todos os vetores de $\mathbb{R}^2$ podem ser escritos como uma combinação linear dos vetores de β.

$$a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2 = 0$$

$$a(1,2) + b(2,1) = 0$$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \qquad a = -2b$$

$\hookrightarrow 2(-2b) + b = 0$ $\qquad a = -2 \cdot 0$

$-4b + b = 0$ $\qquad a = 0$

$-3b = 0$

$b = 0$

$\boxed{\text{os vetores são L.I.}}$

$(x,y) = a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2$

$(x,y) = a \cdot (1,2) + b\,(2,1)$

$(x,y) = (a + 2b,\ 2a + b)$

logo, qualquer vetor (x,y) pode ser escrito como combinação linear de $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$.

β é uma base do $\mathbb{R}^2$

$\vec{u} = (6,2)$

$\beta = \{(1,2);(2,1)\}$

$(6,2) = a\,(1,2) + b\,(2,1)$

$$\begin{cases} a + 2b = 6 \rightarrow a = 6 - 2b \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow 2.(6-2b)+b = 2$

$12 - 4b + b = 2$

$12 - 3b = 2$

$b = 10/3$

$a = 6 - 2 \cdot \frac{10}{3}$

$a = 6 - \frac{20}{3}$

$a = \frac{-2}{3}$

logo $10/3$ e $-2/3$ são as coordenadas de $\vec{u}$ em β

$[\vec{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 10/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

$(6,2) = -2/3\,(1,2) + 10/3\,(2,1)$

$(6,2) = (-2/3 + 20/3\ ,\ -4/3 + 10/3)$

$(6,2) = (6,2)$

1) Mostre que cada conjunto a seguir é uma base para $\mathbb{R}^2$. Em seguida, determine as coordenadas do vetor $\vec{v}=(6,2)$ em relação a cada uma das bases dadas.

d) $\delta=\{(0,1);(1,0)\}$

Verificando se $\{(0,1);(1,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$:

Primeiro veremos se é L.I:

$x(0,1)+y(1,0)=(0,0)$

$0+y=0 \qquad y=0 \qquad$ É L.I!

$x+0=0 \qquad x=0$

Agora iremos verificar se $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\mathbb{R}^2$. Então:

$\vec{V}=\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2$

$(x,y)=\alpha(0,1)+\beta(1,0) \qquad (x,y)=(\beta,\alpha)$

$x=\beta$ e $y=\alpha$

Portanto os vetores $\vec{u}_1=(0,1)$, $\vec{u}_2=(1,0)$ formam uma base para o $\mathbb{R}^2$.

Agora iremos determinar as coordenadas do vetor $\vec{u} = (6,2)$

Como os vetores $(0,1)$ e $(1,0)$ são base para $\mathbb{R}^2$, então:

$$(6,2) = y(0,1) + x(1,0)$$

$$(6,2) = (x,y) \qquad x = 6 \quad y = 2$$

$$\boxed{[\vec{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}}$$

2. Quais são as coordenadas de $\vec{u} = (1,0,0)$ em relação à base

$$\beta = \{(1,1,1); (-1,1,0); (1,0,-1)\}$$

do $\mathbb{R}^3$?

02. Combinação Linear de β

$$\vec{u} = (1,0,0) = a(1,1,1) + b(-1,1,0) + c(1,0,-1)$$

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ a + b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a + a + a = 1 \Rightarrow a = 1/3 \\ a = -b \\ a = c \end{matrix}$$

$b = -1/3$

$c = 1/3$

Então $[\vec{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

04. Como são três vetores em $\mathbb{R}^3$, para verificar se formam uma base basta verificar se são L.I. Escrevendo a combinação linear

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0,$$

montamos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ 6\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 7\gamma = 0 \end{cases},$$

o qual possui $\alpha = \beta = \gamma = 0$ como solução geral. Logo, v_1, v_2 e v_3 são L.I. e, portanto, formam uma base para $\mathbb{R}^3$. Denotemos por $\theta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal base.

Dado, $v = (3, 7, 1)$, então, escrevendo-o como uma combinação linear na base θ, vamos obter

$$(3, 7, 1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3,$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\gamma = 3 \\ 6\alpha + 5\beta + \gamma = 7 \\ 3\alpha + 4\beta + 7\gamma = 1 \end{cases},$$

obtendo $\alpha = -\frac{1}{5}$, $\beta = \frac{9}{5}$ e $\gamma = -\frac{4}{5}$, ou seja,

$$(3, 7, 1) = -\frac{1}{5}(2, 6, 3) + \frac{9}{5}(1, 5, 4) - \frac{4}{5}(-2, 1, 7),$$

e então as coordenadas de $(3, 7, 1)$ na base θ serão dadas por

$$[(3, 7, 1)]_\theta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

8) Ache a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1,1,0);(0,1,0);(0,0,3)\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Considerando que a base canônica do $\mathbb{R}^3$ é dada por $\alpha = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$, o objetivo da questão é encontrar

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Para tanto, vamos denotar $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ e $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Assim, temos que

$$\vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + a_{31}\vec{v}_3 \quad (I)$$

$$\vec{u}_2 = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + a_{32}\vec{v}_3 \quad (II)$$

$$\vec{u}_3 = a_{13}\vec{v}_1 + a_{23}\vec{v}_2 + a_{33}\vec{v}_3 \quad (III)$$

A partir de (I) vem

$$(1,1,0) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$$

$$(1,1,0) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$

Assim, $a_{11} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{31} = 0$.

De (II) vem que

$$(0,1,0) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1)$$

$$(0,1,0) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

segue que $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{32} = 0$.

De (III) vem que

$$(0,0,3) = a_{13}(1,0,0) + a_{23}(0,1,0) + a_{33}(0,0,1)$$

$$(0,0,3) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

donde segue que $a_{13} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 3$.

Portanto a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$ de mudança da base β para a base α é dada por

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

10. No espaço $\mathbb{R}^2$ consideremos as bases $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ (canônica) e $\gamma = \{g_1, g_2, g_3\}$ relacionadas da seguinte maneira:

$$g_1 = e_1 + e_3$$
$$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$$
$$g_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Determinar as matrizes de mudança de base de β para γ e de γ para β.

$\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ $\quad$ $\gamma = \{g_1, g_2, g_3\}$

$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$g_1 = e_1 + e_3$

$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$

$g_3 = e_1 + e_2 + e_3$

$g_1 = e_1 + e_3$

$g_1 = (1,0,0) + (0,0,1)$

$g_1 = (1,0,1)$

$g_2 = 2(e_1) + e_2 + e_3$

$g_2 = 2(1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$

$g_2 = (2,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$

$g_2 = (2,1,1)$

$g_3 = e_1 + e_2 + e_3$

$g_3 = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$

$g_3 = (1,1,1)$

$\gamma = \{(1,0,1); (2,1,1); (1,1,1)\}$

$\beta = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$

Determinar $[I]_{\gamma}^{\beta}$

$$e_1 = a_{11} \cdot g_1 + a_{21} \cdot g_2 + a_{31} \cdot g_3$$

$$(1,0,0) = a_{11}(1,0,1) + a_{21}(2,1,1) + a_{31}(1,1,1)$$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{21} + a_{31} = 0 \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0 \end{cases}$$

Subtrair a 2° da 1°

$$0 + 2a_{21} + \cancel{a_{31}} = 1$$
$$-a_{21} - \cancel{a_{31}} = 0$$
$$\boxed{a_{21} = 1}$$

$$a_{11} + 0 = 0$$
$$\boxed{a_{11} = 0}$$

$$a_{21} + a_{31} = 0$$
$$1 + a_{31} = 0$$
$$\boxed{a_{31} = -1}$$

$$e_2 = a_{12} \cdot g_1 + a_{22} \cdot g_2 + a_{32} \cdot g_3$$

$$(0,1,0) = a_{12} \cdot (1,0,1) + a_{22}(2,1,1) + a_{32}(1,1,1)$$

$$\begin{cases} a_{12} + 2a_{22} + a_{32} = 0 \\ a_{22} + a_{32} = 1 \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0 \end{cases}$$

Subtrair a 3° da 1°

$$\cancel{a_{12}} + 2a_{22} + \cancel{a_{32}} = 0$$
$$-\cancel{a_{12}} - a_{22} - \cancel{a_{32}} = 0$$
$$\boxed{a_{22} = 0}$$

$$a_{12} + 1 = 0$$
$$\boxed{a_{12} = -1}$$

$$0 + a_{32} = 1$$
$$\boxed{a_{32} = 1}$$

$e_3 = a_{13} \cdot g_1 + a_{23} \cdot g_2 + a_{33} \cdot g_3$

$(0,0,1) = a_{13} \cdot (1,0,1) + a_{23}(2,1,1) + a_{33}(1,1,1)$

$$\begin{cases} a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1 \end{cases}$$

$a_{13} + 0 = 1$

$\boxed{a_{13} = 1}$

Subtraindo a 3ª da 2ª

$-1 + a_{33} = 0$

$\boxed{a_{33} = 1}$

$\cancel{a_{13}} + 2 \cdot a_{23} + \cancel{a_{33}} = 0$

$-\cancel{a_{13}} - a_{23} - \cancel{a_{33}} = -1$

$\boxed{a_{23} = -1}$

Conforme os a_{ij} que achamos, temos:

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matriz de mudança de base de β para γ.

Como $\left([I]_{\gamma}^{\beta}\right)^{-1} = [I]_{\beta}^{\gamma}$

para determinar a matriz de mudança de base de γ para β vamos achar a matriz inversa de $[I]_{\gamma}^{\beta}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_3 \to l_3 + 1l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_3 \to l_3 + 1l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \to l_1 + 1l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

logo, temos que a matriz de mudança de base de γ para β é:

$$[I]_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$