Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios
(Limites laterais, infinitos e no infinito)

1. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}$, onde $a > 1$. Prove que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = 1$.

2. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Se existir uma sequência $(x_n) \subset X$ com $x_n > a$, $x_n \to a$ e $f(x_n) \to L$, mostre que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

3. Defina $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$. Em seguida, prove que
$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

4. Prove que $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.

5. Prove que $\lim\limits_{x\to +\infty} \tanh x = 1$

6. Prove que $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x+1}{2x+5} = \dfrac{3}{2}$.

7. Prove que $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 + a^x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ a > 1 \\ +\infty & \text{se } \ 0 < a < 1 \end{cases}$.

8. Prove que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então
$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

9. Suponha que f e g possuem limites em $\mathbb{R}$ quando $x \to +\infty$ e que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (a, +\infty)$. Prove que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

10. Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Usando apenas a definição de limite no infinito, prove que são equivalentes:

    (i) $\exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$,

    (ii) para toda sequência (x_n) em $(a, +\infty)$, $x_n \to +\infty \Longrightarrow f(x_n) \to L$.

11. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ se, e somente se,
$$\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = L.$$

12. Mostre que se $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim\limits_{x\to +\infty} x f(x) = L$, onde $L \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

13. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Prove que $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = -\infty$ e que $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad L > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad L < 0 \end{cases}$.

14. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = -\infty.$$

Prove que $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = -\infty$ e que $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = +\infty$

15. **(Sel. Mestr. UFRGS 2011/2)**
(a) Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Defina precisamente o significado de $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.
(b) Prove que se $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ e $\lim_{x \to \infty} g(x) = B$, então $\lim_{x \to \infty}(f(x) + g(x)) = A + B$.