Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 09 de Exercícios - Transformações Lineares - Parte II
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z,\ y + z,\ x + y - 2z).$$

Determine uma base e a dimensão para o núcleo e para a imagem de T.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (2x,\ 4x - y,\ 2x + 3y - z).$$

   (a) Determine o núcleo e a imagem de T e suas dimensões.

   (b) Calcule $T^2 = T \circ T$.

3. Obtenha o núcleo, a imagem e suas dimensões, da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$; $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.

4. Obtenha o núcleo, a imagem e suas dimensões, da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, 2, 1)$ e $T(3, 4) = (6, 5, 4)$.

5. Sejam F e G operadores lineares de um espaço vetorial V. Mostre que $\ker G \subset \ker(F \circ G)$. Dê um exemplo onde vale a igualdade.

6. Sejam $F \in \mathcal{L}(U, V)$ e $G \in \mathcal{L}(V, W)$ tais que $\ker F = \{0\}$ e $\ker G = \{0\}$. Prove que $\ker(G \circ F) = \{0\}$.

7. (Sel. Mestrado UFSM/2013/2) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, dos polinômios de graus menor ou igual a 2, e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ determinada por $T(1, 0) = 1 - t$ e $T(0, 1) = 1 - t^2$.

   (a) Encontre o núcleo e a imagem da transformação T.

   (b) Esta transformação é injetiva, sobrejetiva, bijetiva? Justifique sua resposta.

8. (Sel. Mestrado UFSM 2018/1) Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, definida por

$$T(p(x)) = p(0) + p(1)(x + x^2),\ \forall p(x) \in P_2(\mathbb{R}).$$

   (a) Prove que T é uma transformação linear.

   (b) Determine o núcleo e a imagem de T. A seguir, para cada uma deles, exiba uma base e dê a sua dimensão.

   (c) T é um isomorfismo? Justifique.

9. (Sel. Mestrado UFRGS/2011/2) Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Considere $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\} \subset U$.

   (a) Mostre que se $\{T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), ..., T(\vec{u}_k)\}$ é linearmente independente em V, então S é linearmente independente em U.

   (b) Mostre que se T é injetora e S é linearmente independente em U, então $\{T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), ..., T(\vec{u}_k)\}$ é linearmente independente em V.

10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$

    (a) Determine uma base do núcleo de T.

    (b) Dê a dimensão da imagem de T.

    (c) T é sobrejetora? Justifique.

    (d) Faça um desenho para $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

11. (Sel. Mestrado UFSM 2017/1) Seja $\mathcal{P}_5$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou do que, igual a 5, com coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $T : \mathcal{P}_5 \to \mathcal{P}_5$ é definida por

$$T(p(x)) = 3p'(x) + 5p(x), \ \forall p(x) \in \mathcal{P}_5,$$

    então mostre que T é um isomorfismo.

12. (Sel. Mestrado UFRGS 2016/1) Dados V, W espaços vetoriais sobre um corpo[1] $\mathbb{K}$ e $A : V \to W$ um isomorfismo, mostre que a aplicação $\varphi : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(W)$ dada por $\varphi(B) = ABA^{-1}$ define um isomorfismo linear entre $\mathcal{L}(V)$ e $\mathcal{L}(W)$.

[1] Podes considerar $\mathbb{K}$ como sendo $\mathbb{R}$.