Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 10 de Exercícios - Transformações Lineares III
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y, z) = (z, x + y)$. Determine a matriz de T em relação às bases $\beta = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0,); (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e *can* a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

2. Seja $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definido por $G(x, y, z) = (2x + z, x - 4y - z)$. Ache a matriz da transformação $[T]_\gamma^\beta$ quando as bases β e γ forem:

   (a) as respectivas bases canônicas do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\beta = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (-1, 0, 0)\}$ e γ a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

   (c) $\beta = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (-1, 0, 0)\}$ e $\gamma = \{(-1, 2); (1, 1)\}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $T(x, y, z)$.

   (b) Qual é a matriz do operador T com relação à base $\beta = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$?

   (c) O operador T é invertível? Justifique.

4. Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e
$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Ache T.

   (b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, ache $[S]_\beta^\alpha$.

   (c) Ache uma base γ tal que $[T]_\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Se $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ache $R \circ S$.

6. Sejam F e G os operadores lineares do $\mathbb{R}^2$ dados por $F(x, y) = (x, x - y)$ e $G(x, y) = (x + y, 2x)$. Determine as matrizes das transformações a seguir, em relação à base canônica:

   (a) $F + G$ (b) $F \circ G$ (c) F^2 (d) $(F + G) \circ F$

7. Seja $F \in \mathcal{L}(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ definida por $F(p(t)) = \int_{-1}^{1} p(t)\, dt$. Determine a matriz de $[F]_\gamma^\beta$ em relação às bases:

   (a) $\beta = \{1, t, t^2\}$ e $\gamma = \{1\}$;

   (b) $\beta = \{1, 1 + t, -1 + t^2\}$ e $\gamma = \{-2\}$.

8. Determine a representação matricial de cada um dos seguintes operadores do $\mathbb{R}^2$ em relação às bases indicadas:

   (a) $F(x, y) = (2x, 3y - x)$ e base canônica.

   (b) $F(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$ e base $\beta = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

9. (Sel. Mestrado UFSM/2015/2) Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois.

   (a) Verifique que $\beta = \{1 + t, -1 + t, t^2\}$ é uma base de P_2.

   (b) Verifique que $T : P_2 \to P_2$ definido por $T(f(t)) = \frac{df(t)}{dt} - f(t)$ é um operador linear.

   (c) Encontre a matriz que representa T com relação à base β.

10. (Sel. Mestrado UFRGS/2008/1) Seja P_n o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n:

$$P_n = \{f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n,\ t \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Obtenha uma base e a dimensão de P_4.

   (b) Mostre que P_3 é um subespaço vetorial de P_4.

   (c) Considere o operador linear $D : P_4 \to P_4$ definido como $Df(x) = \frac{df}{dx}(x)$. Obtenha a matriz da transformação linear D numa base conveniente de P_4.

   (d) O operador D do item (c) é injetivo? É sobrejetivo?

11. (Sel. Mestrado UFRGS/2008/2) Seja $\beta = \{\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 3t\}$ uma base do espaço vetorial $V = \{a_1 \operatorname{sen} t + a_2 \operatorname{sen} 2t + a_3 \operatorname{sen} 3t\ :\ a_i \in \mathbb{R}\}$. Dado um número real c, seja $T : V \to V$ o operador definido por

$$T(f(t)) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + cf(t).$$

   (a) Mostre que T é um operador linear.

   (b) Obtenha a matriz que representa o operador T na base β.

   (c) Que valor c deve ter para que T não seja bijetora?