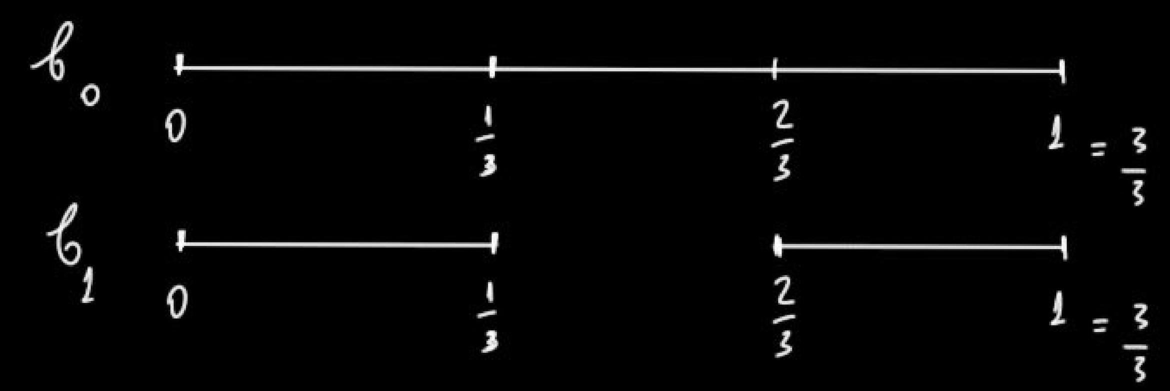
TEOREMA: $X \subset \mathbb{R}$. X é um fechado de $\mathbb{R} \iff X^c$ for aberto.

Ex.: **Conjunto de Cantor:**

Tome o intervalo fechado $[0,1]$; chame-o de C_0. Vamos dividir este intervalo em 3 subintervalos de mesmo comprimento; no caso, $\frac{1}{3}$. Retiramos o intervalo aberto central $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, obtendo assim o conj. C_1.

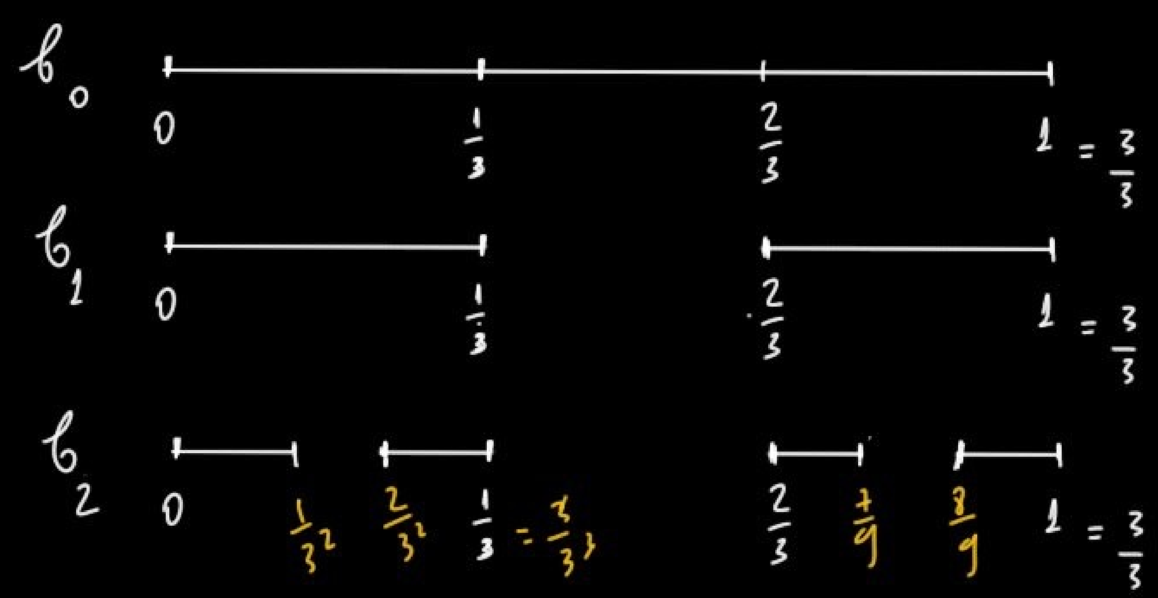


$C_0 = [0,1]$, formado por $1 = 2^0$ intervalo fechado

$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, formado por $2^1 = 2$ intervalos fechados.

$l = \frac{1}{3}$

Seguindo o procedimento, retiramos cada subintervalo central de C_1 (ou seja, a terça parte central aberta de $[0, \frac{1}{3}]$ será retirada, e também a terça parte central de $[\frac{2}{3}, 1]$)

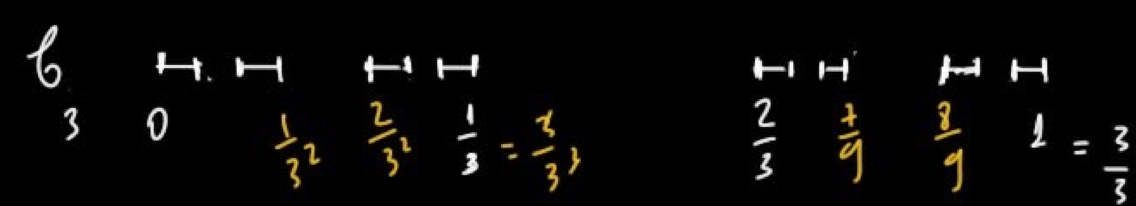


$l_1 = \frac{1}{3}$

$l_2 = \frac{1}{3^2}$

$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, formado por $2^2 = 4$ subintervalos fechados

$l_3 = \frac{1}{3^3}$



$\vdots$ etc...

Note que, em cada passo n, C_n é a união de 2^n intervalos fechados, ou seja, C_n é uma união finita de fechados de $\mathbb{R}$, logo, por proposição, segue que C_n é um fechado de $\mathbb{R}$.

Definimos o conjunto de Cantor C como sendo

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

que será um fechado de $\mathbb{R}$, pois é uma interseção (infinita) de fechados de $\mathbb{R}$.

Note que $C \neq \emptyset$, pois em cada etapa da construção, as extremidades de C_0, C_1, C_2, etc., sempre ficam.

FRONTEIRA DE UM CONJUNTO

Def.: Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que $a \in M$ é um ponto de fronteira do conj. X se, e só se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$B(a,\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$$

e

$$B(a,\varepsilon) \cap X^c \neq \emptyset.$$

$\Longrightarrow$

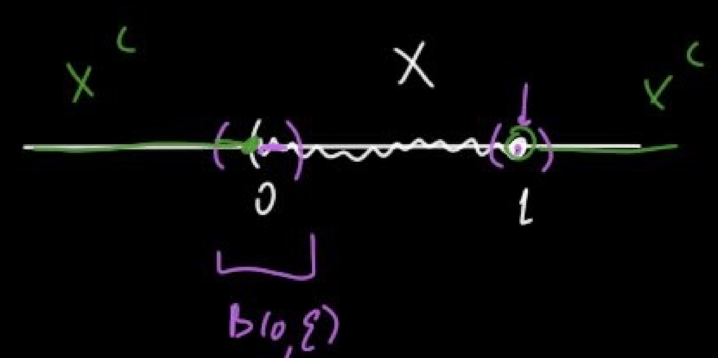
O conjunto de todos os pontos de fronteira de um conj. X é chamado de FRONTEIRA de X, e é denotado por ∂X.

Adaptando a def. acima para $\mathbb{R}$, temos:

$X \subset \mathbb{R}$. $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de fronteira de $X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X^c \neq \emptyset$.

EX.: $M = \mathbb{R}$. $X = (0,1]$.

$0 \in \partial X$ pois, $\forall \varepsilon > 0$, $B(0,\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $B(0,\varepsilon) \cap X^c \neq \emptyset$



Do mesmo modo $1 \in \partial X$.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$.

PROPOSIÇÃO: Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então:

$$\partial X = \overline{X} \setminus \text{int}(X)$$

DEMONSTR.: Provaremos duas afirmações:

AF.01: $\partial X \subset \overline{X} \setminus \text{int}(X)$:

Dado $a \in \partial X$. Então, $\forall \varepsilon > 0$,

$$B(a,\varepsilon) \cap X \neq \emptyset \quad (*)$$

e

$$B(a,\varepsilon) \cap X^c \neq \emptyset \quad (**)$$

Como $(*)$ vale $\forall \varepsilon > 0$, em particular para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

temos

$$B(a,\tfrac{1}{n}) \cap X \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ou seja, $\boxed{a \in \overline{X}}$ (I) (por proposição).

Além disso, temos por $(**)$ que $B(a,\varepsilon) \not\subset X$, $\forall \varepsilon > 0$, ou seja, $\boxed{a \notin \text{int}\, X}$ (II). De (I) e (II) segue que $a \in \overline{X} \setminus \text{int}(X)$

Pela arbitrariedade de escolha do ponto a, segue a AF.01.

AF 02: $\overline{X}\setminus \text{int}(X) \subset \partial X$:

Dado $a \in \overline{X}\setminus \text{int}\, X$.

Como $a\in\overline{X}$, então, $\forall n\in\mathbb{N}$, $B(a,\frac{1}{n})\cap X\neq\emptyset$.

Tome $\varepsilon>0$ tal que $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Assim,

$$B(a,\tfrac{1}{n})\subset B(a,\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \emptyset\neq B(a,\tfrac{1}{n})\cap X\subset B(a,\varepsilon)\cap X$$

Logo, $\boxed{B(a,\varepsilon)\cap X\neq\emptyset}$ (*)

Além disso, $a\notin \text{int}\, X$. Assim, $\forall\varepsilon>0$,

$B(a,\varepsilon)\not\subset X$; ou seja

$\boxed{B(a,\varepsilon)\cap X^c\neq\emptyset}$ (**)

De (*) e (**) segue que $a\in\partial X$.

Pela arbitrariedade da escolha do ponto a, segue a AF.02

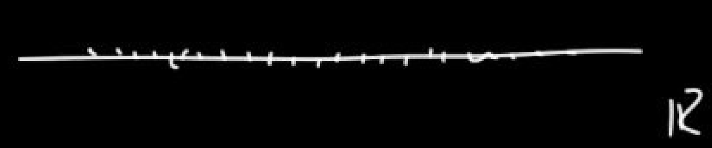
Logo, pelas AF.01 e 02 segue a igualdade desejada,

ou seja, segue que

$$\partial X = \overline{X}\setminus\text{int}\, X.$$

□

EXEMPLOS:



01) $\partial\mathbb{Q}=?$

$\partial\mathbb{Q}=\overline{\mathbb{Q}}\setminus\text{int}\,\mathbb{Q}$

$= \mathbb{R}\setminus\emptyset=\mathbb{R}$.

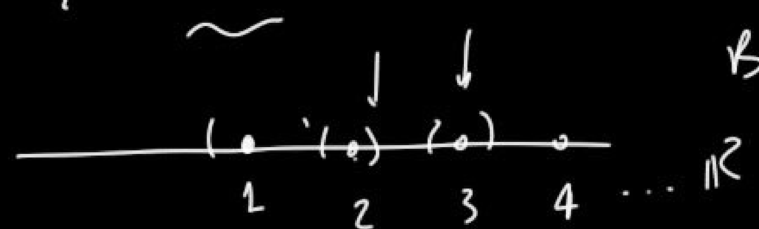
$a\in\mathbb{I}$.
$\forall n\in\mathbb{N}$
$B(a,\frac{1}{n})\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$

02) $\partial\mathbb{N}=?$

$\partial\mathbb{N}=\overline{\mathbb{N}}\setminus\text{int}\,\mathbb{N}$

$\partial\mathbb{N}=\mathbb{N}\setminus\emptyset=\mathbb{N}$

$\text{int}\,\mathbb{N}=\emptyset$.
$\varepsilon=\frac{1}{2}>0$
$B(n,\varepsilon)\not\subset\mathbb{N}$



$\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}$ $\forall n\in\mathbb{N}$,

$B(n,\frac{1}{n})\cap\mathbb{N}=\{n\}\neq\emptyset$

PONTO DE ACUMULAÇÃO DE UM CONJUNTO:

Def: Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que $a \in M$ é um ponto de acumulação do conj. X se, e só se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Em outras palavras, $a \in M$ é ponto de acumulação de $X \subset M$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$(B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset.$$

Quando $M = \mathbb{R}$ e $d(x,y) = |x - y|$, temos: dado $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X se, e só se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tal que $x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.

$\exists x \in X$ tal que

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x \neq a}}{0 <} |x - a| < \varepsilon$$

Dado $X \subset \mathbb{R}$. O conjunto de todos os pontos de acumulação do conj. X chama-se DERIVADO de X, e é denotado por X'. Ou seja:

$$X' = \{ a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset \}.$$

Ex: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. (exercício)

Olhem no livro! $\boxed{\text{Pág. 205}}$

estude a Prop. 6.24.

ver no "Pergamum." –