LISTA 05

10. Sejam $0 < r < 1$ e (x_n) uma sequência tais que $|x_{n+1} - x_n| < r^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência (x_n) é de Cauchy.

$|x_{n+1} - x_n| < r^n$

Seja (x_n) uma seq. nas hipóteses dadas.

Para mostrar que (x_n) é de Cauchy, então dado $\varepsilon > 0$, precisamos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$

$$\Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$. Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n + p = m$$

Assim, temos

$$|x_m - x_n| = |x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} - \dots$$

$$\dots + x_{n+1} - x_n| \leq$$

$$\leq \underbrace{|x_{n+p} - x_{n+p-1}|}_{< r^{n+p-1}} + \underbrace{|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}|}_{< r^{n+p-2}} + \dots + \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{< r^n}$$

$$< \underbrace{r^{n+p-1} + r^{n+p-2} + r^{n+p-3} + \dots + r^n}_{\cancel{n}+p-\cancel{1}-\cancel{n}+1 = p \text{ aditivos}} = S_p = \frac{a_1 \cdot (q^p - 1)}{q - 1} =$$

SOMA DE "p" ADITIVOS DE UMA P.G. DE RAZÃO $q = r < 1$ e $a_1 = r^{n+p-1}$

$0 < r < 1$

$0 < r < 1$

$$= \frac{r^{n+p-1} \cdot (r^p - 1)}{\underbrace{r - 1}_{< 0}} = \frac{r^{n+p-1} \cdot (1 - r^p)}{1 - r} = \frac{r^{n+p-1}}{1 - r} - \frac{r^{n+2p-1}}{1 - r} < \frac{r^{n+p-1}}{1 - r}$$

$$\Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{r^{n+p-1}}{1 - r} = \frac{r^{m-1}}{1 - r} < \varepsilon$$

$n + p = m$
$\Rightarrow p = m - n$
Logo, $n + p - 1 = \cancel{n} + m - \cancel{n} - 1$
$= m - 1$

Dado $\varepsilon > 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\boxed{\dfrac{r^{n_0 - 1}}{1 - r} < \varepsilon}$.

Assim $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow m - 1 \geq n_0 - 1$

$$\Rightarrow r^{m-1} \leq r^{n_0 - 1} \Rightarrow \frac{r^{m-1}}{1 - r} \leq \frac{r^{n_0 - 1}}{1 - r}$$

pois $0 < r < 1$

e disso, segue que

$$|x_m - x_n| \leq \frac{r^{m-1}}{1 - r} \leq \frac{r^{n_0 - 1}}{1 - r} < \varepsilon.$$ Logo, (x_n) é de Cauchy

L4

8. Mostre que a sequência (x_n) definida por

$$x_n = \frac{(n^2+20n+35)\operatorname{sen} n^3}{n^2+n+1}$$

possui uma subsequência convergente.

SOLUÇÃO: Basta mostrarmos que (x_n) é limitada, pois pelo T. de Bolzano–Weierstrass (T.B–W) seguirá que (x_n) possui uma subseq. convergente.

Vamos avaliar $|x_n|$:

$$|x_n| = \left|\frac{(n^2+20n+35)\cdot \operatorname{sen} n^3}{n^2+n+1}\right| = \left|\frac{n^2+20n+35}{n^2+n+1}\right| \cdot \underbrace{|\operatorname{sen} n^3|}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \frac{n^2+20n+35}{n^2+n+1} = \underbrace{\frac{n^2+n+1}{n^2+n+1}}_{=1} + \frac{19n+34}{n^2+n+1} =$$

$$= 1 + \frac{19n+34}{n^2+n+1} < 1 + \frac{53n}{n^2+n+1} < 1 + \frac{53\cancel{n}}{2\cancel{n}} = 1 + \frac{53}{2} = \frac{55}{2}$$

$19n+34 < 19n+34n = 53n$

$n^2+n+1 \geq n+n+1 = 2n+1 > 2n$
$\Rightarrow \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow |x_n| < \frac{55}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

logo, (x_n) é limitada, e, portanto, possuirá uma subsequência convergente (c.f. T.B–W).