Resolução de alguns exercícios da lista 06

04) $d: \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) \times \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) \to [0, +\infty)$

$$d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

d define uma métrica em $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ pois:

$\forall f, g, h \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, temos:

(i) $d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \geq 0$ e

$$d(f,g) = 0 \iff \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| = 0$$

$$\iff f(x) = g(x), \ \forall x \in A.$$

$$\iff f = g.$$

(ii) $d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in A} |g(x) - f(x)|$

$$= d(g,f).$$

(iii) $d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \leq$

$$= \sup_{x \in A} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in A} \big(|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\big) \leq$$

$\sup (f+g) \leq \sup f + \sup g$

$$\leq \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)|$$

$$= d(f,h) + d(h,g).$$

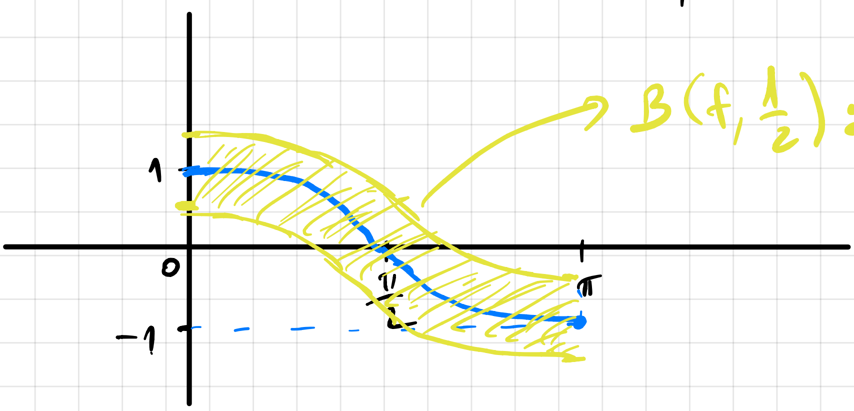
Vamos desenhar $B(f, \frac{1}{2})$, onde

$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

$$B(f, \tfrac{1}{2}) = \{ g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) : d(f,g) < \tfrac{1}{2} \}$$

$$= \{ g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) : \sup_{x \in [0,\pi]} |f(x) - g(x)| < \tfrac{1}{2} \}$$

$$= \{ g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) : \sup_{x \in [0,\pi]} |\cos x - g(x)| < \tfrac{1}{2} \}$$



$B(f, \frac{1}{2})$: FAIXA DE RAIO $\frac{1}{2}$ CENTRADA EM f.

05) (X_1, d_1) ; (X_2, d_2) - esp. métricos

Vamos mostrar que

$$d : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty)$$

$$d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$$

é uma métrica em $X_1 \times X_2$. De fato;

$\forall\, x, y, z \in X_1 \times X_2$ temos:

$x = (x_1, x_2)$, com $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$

$y = (y_1, y_2)$, com $y_1 \in X_1$ e $y_2 \in X_2$

$z = (z_1, z_2)$, com $z_1 \in X_1$ e $z_2 \in X_2$

e então:

(i) $d(x,y) = \underbrace{d_1(x,y)}_{\geq 0} + \underbrace{d_2(x,y)}_{\geq 0} \geq 0$, pois d_1 e d_2 são métricas.

e $d(x,y) = 0 \iff d_1(x,y) + d_2(x,y) = 0$

$\iff d_1(x,y) = 0$ e $d_2(x,y) = 0$

$\iff x = y$ [em qualquer dos casos pois d_1 e d_2 são métricas]

(ii) $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) \underset{\text{pois } d_1 \text{ e } d_2 \text{ são métricas}}{=} d_1(y,x) + d_2(y,x) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) \leq$

$\underset{\text{pois } d_1 \text{ e } d_2 \text{ são métricas}}{\leq} d_1(x,z) + d_1(y,z) + d_2(x,z) + d_2(y,z) =$

$= \big(d_1(x,z) + d_2(x,z)\big) + \big(d_1(y,z) + d_2(y,z)\big)$

$= d(x,z) + d(y,z)$

Logo, d define uma métrica em $X_1 \times X_2$.

09) Suponha que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$

Mostrar: $x_n \to x$ e $y_n \to y$.

Dado $\varepsilon > 0$. Então, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_0 \Longrightarrow d\big((x_n, y_n), (x, y)\big) < \varepsilon$$

i.e., $\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$

[a métrica usual é a euclidiana]

Então,

$\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon$, implica em

$$\sqrt{(x_n - x)^2} < \varepsilon \quad \text{e} \quad \sqrt{(y_n - y)^2} < \varepsilon$$

i.e., $|x_n - x| < \varepsilon$ e $|y_n - y| < \varepsilon$,

sempre que $n \geq n_0$, i.e., mostramos que

$$x_n \to x \quad \text{e} \quad y_n \to y.$$

Reciprocamente, suponha que $x_n \to x$ e $y_n \to y$.
Assim, dado $\varepsilon > 0$. Então:

- como $x_n \to x$, então $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

• como $y_n \to y$, então $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_2 \implies |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (II)$$

Tome $n_0 = \text{máx.}\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall n \geq n_0$, valem (I) e (II). Com isso, $\forall n \geq n_0$, temos

$$\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2} + \sqrt{(y_n - y)^2}$$

$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$= |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ou seja,

$$d((x_n, y_n), (x, y)) = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0,$$

i.e., mostramos que $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

---

11) Tome $X = \mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{I}$. Neste caso,

$$X \cup Y = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}, \text{ e}$$

$\text{int.}(X \cup Y) = \text{int.}\,\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Porém, $\text{int.}\,\mathbb{Q} = \emptyset$ e $\text{int}\,\mathbb{I} = \emptyset$.

Assim,

$$\text{int.}(X) \cup \text{int}(Y) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \neq \mathbb{R} = \text{int.}(X \cup Y).$$

16) Pois na prova da referida proposição tomamos

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\},$$

visto que há uma quantidade finita de abertos, e então, é possível escolher o menor deles. Já no caso infinito isso já não é possível.