— RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 05 —

02) MOSTRE QUE SE (x_n) E (y_n) FOREM SEQUÊNCIAS TAIS QUE $x_n \leq y_n$, $\forall n \geq n_0$ E $x_n \to +\infty$, ENTÃO $y_n \to +\infty$.

SOL.: Dado $M > 0$. Como $x_n \to +\infty$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow x_n > M. \qquad (I)$$

Como por hipótese

$$x_n \leq y_n, \ \forall n \geq n_0, \qquad (II)$$

tomando $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$, temos que, $\forall n \geq \tilde{n}$, valem (I) e (II); e disso,

$$y_n \geq x_n > M.$$

Ou seja, para $M > 0$, obtemos $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq \tilde{n} \Rightarrow y_n > M$; i.e.,

$$y_n \to +\infty.$$

06) Basta tomar, por exemplo,

$$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n$, porém,

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$. De fato, como $\emptyset \subset \bigcap I_n$,

basta mostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subset \emptyset$. Faz-se

por absurdo e fica como exercício.

---

08) MOSTRE QUE A SEQUÊNCIA (x_n) DEFINIDA POR:

$$x_n = \frac{(n^2 + 20n + 35) \cdot \operatorname{sen} n^3}{n^2 + n + 1}$$

POSSUI UMA SUBSEQUÊNCIA CONVERGENTE.

Solução: Se mostrarmos que (x_n) é limitada, pelo T. B-W segue que possuirá subseq. convergente.

De fato;

$|\sin \alpha| \leq 1.$

$$|x_n| = \left| \frac{(n^2+20n+35).\sin n^3}{n^2+n+1} \right| \leq$$

$$\frac{n^2+20n+35}{n^2+n+1} =$$

$$= \underbrace{\frac{n^2+n+1}{n^2+n+1}}_{1} + \frac{19n+34}{n^2+n+1} = 1 + \underbrace{\frac{19n+34}{n^2+n+1}}_{\geq 0} \leq$$

$$\underset{\text{Pois } 34n > 19n}{\leq} 1 + \frac{34n+34}{n^2+n+1} \underset{\text{ADICIONA } 34n^2}{\leq} 1 + \frac{34n^2+34n+34}{n^2+n+1}$$

$$= 1 + \frac{34\,(n^2+\cancel{n+1})}{\cancel{n^2+n+1}} = 1+34 = \underline{35}$$

$\Longrightarrow |x_n| \leq 35, \ \forall n \in \mathbb{N}$; i.e.,

(x_n) é limitada. Então, pelo T. B–W,

segue que (x_n) possui sub-seq. convergente. $\square$

09) PROVE QUE (x_n) DADA POR $x_n = \frac{\cos n\pi}{n}$ É DE CAUCHY.

SOL.: Obs.: Lembrando da def. de seq. de Cauchy

(x_n) é de Cauchy $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

$$x_n = \frac{\cos n\pi}{n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Precisamos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Sem perda de generalidade, assuma que $m > n$.

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{\cos m\pi}{m} - \frac{\cos n\pi}{n} \right| =$$

$$= \left| \frac{n \cdot \cos m\pi - m \cdot \cos n\pi}{m \cdot n} \right| \leq$$

$$\leq \frac{m \cdot \overbrace{|\cos m\pi|}^{\leq 1} + n \cdot \overbrace{|\cos n\pi|}^{\leq 1}}{m \cdot n} \leq \frac{\cancel{n}}{m \cdot \cancel{n}} + \frac{\cancel{m}}{\cancel{m} \cdot n}$$

$$= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

$$m > n \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

Logo, basta tomar $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$; e disso,

$\forall m, n \geq n_0$, implica que

$$|x_m - x_n| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} = 2 \cdot \frac{1}{n_0} < \cancel{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{2}} = \varepsilon.$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$$

10) SEJAM $0 < r < 1$ E (x_n) UMA SEQ. TAIS QUE

$$|x_{n+1} - x_n| < r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

MOSTRE QUE A SEQUÊNCIA (x_n) É DE CAUCHY.

SOLUÇÃO: Dado $\varepsilon > 0$.

Sejam $m > n \in \mathbb{N}$. Tome $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Assim, estimamos:

$$|x_m - x_n| = |x_{n+p} - x_n| =$$

$$|x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n| \le$$

$$\le \underbrace{|x_{n+p} - x_{n+p-1}|}_{< r^{n+p-1}} + \underbrace{|x_{n+p-1} + x_{n+p-2}|}_{< r^{n+p-2}} + \cdots + \underbrace{|x_{n+1} - x_n|}_{< r^n} <$$

DESIGUALD. TRIANG.

$$< \underbrace{r^{n+p-1} + r^{n+p-2} + \cdots + r^n}_{} =$$

SOMA DE $\cancel{n} + p - 1 - \cancel{n} + 1 = p$ TERMOS DE UMA P.G. DE RAZÃO $\dfrac{r^{n+p-1}}{r^{n+p-2}} = r^{-1}$

ONDE:

$$S_k = a_1 + \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \dots + \cancel{a_1 q^{k-1}}$$

$$- \quad q \cdot S_k = \cancel{a_1 q} + \cancel{a_1 q^2} + \cancel{a_1 q^3} + \dots + \cancel{a_1 q^{k-1}} + a_1 q^k$$

$$S_k - q \cdot S_k = a_1 - a_1 \cdot q^k$$

$$(1-q) \cdot S_k = a_1 - a_1 \cdot q^k$$

$$S_k = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^k}{1-q}$$

$$= \quad \frac{r^{m+p-1}}{1 - \frac{1}{r}} - \frac{r^{m+p-1} \cdot (r^{-1})^p}{1 - \frac{1}{r}} =$$

$$\frac{r^{m+p-1}}{\frac{r-1}{r}} - \frac{r^{m+\cancel{p}-1-\cancel{p}}}{\frac{r-1}{r}} =$$

$$\frac{r^{m+p}}{r-1} - \frac{r^m}{r-1} = \frac{r^m}{1-r} - \frac{r^{m+p}}{1-r} \le$$

$$\le \frac{r^m}{1-r}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{|x_n - x_m| < \frac{r^m}{1-r}}$$

Assim, para $\varepsilon > 0$ escolhido, tome $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\dfrac{r^{n_0}}{1-r} < \varepsilon$.

Assim, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow r^n \leq r^{n_0} \Rightarrow$
$(r < 1)$

$$\Rightarrow \frac{r^n}{1-r} < \frac{r^{n_0}}{1-r} < \varepsilon$$

Ou seja, mostramos que, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 deve ser tal que $\dfrac{r^{n_0}}{1-r} < \varepsilon$) tal que,

$\forall m, n \geq n_0$ $(m > n)$, implica em

$$|x_m - x_n| < \varepsilon .$$

Ou seja (x_n) é de Cauchy.

$\square$