UFPEL

ANÁLISE REAL I — PROF. DR. MAURÍCIO ZAHN

RESOLUÇÃO DE ALGUNS EXERCÍCIOS DA LISTA 04.

02) Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \quad , \text{i.e.,}$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1 \qquad (*)$$

Do mesmo modo, como

$\lim_{n\to\infty} z_n = a$, segue que $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_2 \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \ ; \text{ i.e.,}$$

$$-\varepsilon < z_n - a < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_2 \qquad (**)$$

Como $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n$, então

$$x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a, \ \forall n. \qquad (***)$$

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$. Assim,

$\forall n \geq n_0$, valem simultaneamente $(*)$ e $(**)$, ou seja,

$$\begin{cases} -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \\ -\varepsilon < z_n - a < \varepsilon \end{cases}, \forall n \geq n_0 .$$

Logo, observando estas desigualdades, temos de (***) que

$$-\varepsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \varepsilon , \forall n \geq n_0 .$$

por (**)

por (*)

Ou seja, acabamos de mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon , \text{ sempre que } n \geq n_0 ,$$

i.e., provamos que $y_n \longrightarrow a$.

$\square$

---

03) mostrar que $\dfrac{\cos n}{n} \longrightarrow 0$.

Note que;

$$0 \leq \left| \frac{\cos n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

Então, pensando nas seq. $x_n = 0$, $\forall n$ e

$z_n = \frac{1}{n}$, segue que $x_n \to 0$ e $z_n \to 0$.

Logo, pelo exercício anterior [T. do sanduíche para sequências] segue que

$$z_n = \left|\frac{\cos n}{n}\right| \to 0 \implies \frac{\cos n}{n} \to 0.$$

$\square$

---

05) $a, b \geq 0$. mostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}.$$

Note que $\left.\begin{array}{l} a \leq \max\{a,b\} \\ b \leq \max\{a,b\} \end{array}\right]$ (I)

Observando que

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \geq \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \geq \sqrt[n]{b^n} = b,$$

combinando estas duas desigualdades, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \geq \max\{a,b\} \quad \text{(II)}$$

(isto porque $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ é maior ou igual do que a e do que b; logo, será maior ou igual ao maior deles, QUE SERÁ $\max\{a,b\}$)

De (I) e (II), vem:

$$\max\{a,b\} \leq \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{(\max\{a,b\})^n+(\max\{a,b\})^n}$$

pois, por (I),
$a \leq \max\{a,b\}$ e
$b \leq \max\{a,b\}$

Logo, obtemos

$$\max\{a,b\} \leq \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{2\cdot(\max\{a,b\})^n}$$

$$\Rightarrow \max\{a,b\} \leq \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{2}\cdot \max\{a,b\}$$

Aplicando o T. do Sanduíche (exercício 2),
e observando que $\sqrt[n]{2} \to 1$ (exercício 4),
segue que

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \max\{a,b\}}_{\max\{a,b\}\ (\text{CONSTANTE})} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}}_{1}\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \max\{a,b\}}_{\max\{a,b\}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}.$$

$\square$

06) Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e que (b_n) é tal que $\exists\, M>0$ tal que $|b_n| \leq M$.

Vamos mostrar que $a_n \cdot b_n \to 0$.

Dado $\varepsilon>0$. Como $a_n \to 0$, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Então:

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| = \underbrace{|a_n|}_{<\frac{\varepsilon}{M}} \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M} < \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M} = \varepsilon$$

Logo, mostramos que, para o $\varepsilon>0$ dado, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em

$$|a_n \cdot b_n - 0| < \varepsilon \quad , \text{ i.e., } \quad a_n \cdot b_n \to 0.$$

Vejamos agora que a conclusão será falsa se retirarmos a hipótese da limitação da seq. (b_n). De fato, sejam $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ e (b_n) a seq. dada por $b_n = n$. (não é limitada).
($b_n \to \infty$)

Neste caso teremos

$$a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

$\square$

11) Seja (x_n) seq. , $x_n > 0, \forall n$, tal que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ tal que $L + \varepsilon < 1$.

Então, pelo def. de limite, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, implique em

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \varepsilon \quad , \quad \text{e então}$$

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| - |L| \leq \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| - |L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < \varepsilon + |L| := \lambda,$$

ou seja, define $\lambda := \varepsilon + |L| < 1$ $\big(\lambda \in (0,1)\big)$

Assim,

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < \lambda \iff |x_{n+1}| < \lambda \cdot |x_n| \, , \, \forall n \geq n_0 .$$

Mostremos que se $x_n > 0, \forall n$, e $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, então $x_n \to 0$.

De fato, pelo feito acima, e como $x_n > 0, \forall n$,

$$x_{n+1} < \lambda \cdot x_n \quad , \forall n \geq n_0.$$

Então, como $x_n < \lambda \cdot x_{n-1}$

$$x_{n-1} < \lambda \cdot x_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$x_{n_0+1} < \lambda \cdot x_{n_0} \quad ,$$ temos que

$$x_{n+1} < \lambda \cdot x_n < \lambda \cdot (\lambda \cdot x_{n-1}) = \lambda^2 \cdot x_{n-1} < \lambda^2 (\lambda x_{n-2}) =$$

$$= \lambda^3 \cdot x_{n-2} < \cdots < \lambda^{n-n_0+1} \cdot x_{n_0}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} < \lambda^{n-n_0+1} \cdot x_{n_0} = \underbrace{\lambda^n}_{\substack{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ (\text{pois } \lambda \in (0,1))}} \cdot \underbrace{\lambda^{1-n_0} \cdot x_{n_0}}_{\text{CONST. POSITIVA}} \longrightarrow 0$$

Portanto, $x_n \to 0$.

Por fim, mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

- $\dfrac{a^n}{n!} \to 0 \qquad (a>0)$

Seja $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a>0$. Então,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{\cancel{a^n}.a}{(n+1).\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} = \frac{a}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

Portanto, pela primeira parte do exercício segue que $x_n \to 0$, i.e., $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$

- • $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Então:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}.\cancel{n!} \cdot n^n}{\cancel{(n+1)}.(n+1)^n . \cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{n}{n+1} - 1\right)^n = \left(1 + \frac{n-n-1}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)^n =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}}_{\to e}\Bigg]^{\frac{(-1)}{n+1}\cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$ Portanto, pela 1ª parte do exercício segue que

$$\frac{n!}{n^n} \to 0.$$

---

12) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$ Defina a seq. (x_n) recursivamente por

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_n = \sqrt{2\cdot x_{n-1}} \end{cases}$$

Defina $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt{2x}$

Note que:

$$f'(x) = \left[(2x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0 \, , \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Logo, f é crescente.

Vamos mostrar que (x_n) é cresc. e limitada (e disso, convergente)

AF.01: (x_n) é crescente. A prova é feita por indução:

(i) $n = 1$: $\quad x_1 = \sqrt{2}$

$n = 2$: $\quad x_2 = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\sqrt[4]{2}}_{>1}$

$\Rightarrow x_1 < x_2$ ok!

(ii) Suponha que a afirmação verdadeira para um certo $n = k$, i.e., que

$$x_k < x_{k+1}.$$

Precisaremos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, devemos mostrar que

$$x_{k+1} < x_{k+2}.$$

De fato, como f é crescente, segue que

$$x_k < x_{k+1} \Rightarrow \underbrace{f(x_k)}_{\sqrt{2 \cdot x_k}} < \underbrace{f(x_{k+1})}_{\sqrt{2 x_{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2x_k}}_{x_{k+1}} < \underbrace{\sqrt{2x_{k+1}}}_{=x_{k+2}} \Rightarrow x_{k+1} < x_{k+2}$$

Portanto, vale a AF01.

AF02: (x_n) é limitada superiormente.

De fato, vamos provar por indução que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) $n=1$: $x_1 = \sqrt{2} \leq 2$. OK! Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha a afirmação verdadeira para um certo $n=k$, i.e., que vale

$$x_k \leq 2.$$

Vamos mostrar que vale para $n=k+1$, ou seja, mostrar que $x_{k+1} \leq 2$. De fato, como f é crescente,

$$x_k \leq 2 \Rightarrow \underbrace{f(x_k)}_{x_{k+1}} \leq f(2) = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$

$$\Rightarrow x_{k+1} \leq 2.$$

Logo, por (i) e (ii) segue por indução a AF02.

Assim, pelas AF 01 e 02 segue que a seq. (x_n) é crescente e limitada superiormente. Então, por teorema segue que a seq. (x_n) é convergente, i.e., $\exists\, L = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como temos que

$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, então, fazendo a passagem ao limite, vem:

$$\underbrace{x_{n+1}}_{L} = \underbrace{\sqrt{2x_n}}_{\sqrt{2L}}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{2L}$$

$$L^2 = 2L \Rightarrow L^2 - 2L = 0$$

$$L(L-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{L=0} \\ L = 2 \end{cases}$$

DESCARTAMOS POIS $x_n > 0,\ \forall n$

Portanto, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$.

---

22) Sejam (a_n), (b_n) tais que $a_n \to a$ e $b_n \to b$

Como (a_n) e (b_n) são convergentes, segue que elas são limitadas, i.e., $\exists\, M_1, M_2 > 0$ tais que

$$|a_n| \leq M_1 \quad \text{e} \quad |b_n| \leq M_2$$

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

A mostrar: $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot f(b_n) = a \cdot f(b)$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $a_n \to a$, então $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\cdot(|f(b)|+1)} \quad (\mathrm{I})$$

Como f é contínua, para o $\varepsilon > 0$ dado, $\exists\, \delta > 0$ tal que,

$$\forall x, y \in \mathbb{R};\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$$

Ainda, como $b_n \to b$, então $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \delta$$

Pela continuidade de f, segue que

$$|f(b_n) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2M_1},\ \forall n \geq n_2 \quad (\mathrm{II})$$

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$. Assim, valem (I) e (II)

Vamos avaliar $|a_n \cdot f(b_n) - a f(b)|$; $\forall n \geq n_0$.

$$|a_n \cdot f(b_n) - a \cdot f(b)| = |a_n \cdot f(b_n) - a_n \cdot f(b) + a_n \cdot f(b) - a f(b)|$$

$$\leq |a_n| \cdot |f(b_n) - f(b)| + |f(b)| \cdot |a_n - a| <$$

pois $|f(b)|$ PODERIA SER ZERO

$$< \underbrace{|a_n|}_{\leq M_1} \cdot \underbrace{|f(b_n) - f(b)|}_{< \frac{\varepsilon}{2\cdot M_1}} + (|f(b)|+1) \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2(|f(b)|+1)}} <$$

$$< \cancel{M_1} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{M_1}} + \cancel{(|f(b)|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2\,\cancel{(|f(b)|+1)}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

---

24)

Seja $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!}$. Então, temos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1)+1)!} \times \frac{(2n+1)!}{n!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n!} =$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{(n!)}\,\cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)!} \cdot \cancel{n!}}$$

$$= \frac{n+1}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{\cancel{n+1}}{(2n+3)\cdot 2\cdot \cancel{(n+1)}} < 1$$

Então, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja;

$a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, a seq. (a_n) é monótona, no caso, é decrescente.

Vamos mostrar que (a_n) é limitada inferiormente. De fato, basta observar que

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$ Logo, 0 é

cota inferior para a seq. (a_n).

Assim sendo decrescente e limitada inferiormente, segue por teorema que

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$$

Além disso, pelo exercício 11 segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$ e então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$