Resolução de algumas questões da Lista 07, pelos alunos.

3) Prove que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

10

A) Seja $x \in \overline{A \cup B}$

Pela definição de fecho de um conjunto, temos que $\exists (x_n) \subset A \cup B$ tal que $x_n \to x$.

Logo, alguns termos de (x_n) podem pertencer a A e alguns podem pertencer a B.

Então pelo menos um desses conjuntos possui um ponto infinito dessa sequência (pois se nenhum deles possuísse um ponto infinito dessa sequência, sua união também não possuiria).

Suponha sem perda de generalidade, que A possui uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) (se não o possuir então B possui, e a demonstração é análoga)

Portanto, como $x_n \to x$, concluímos que $x_{n_k} \to x$, e portanto, temos uma sequência $(x_{n_k}) \subset A$ tal que $x_{n_k} \to x$.

Com isso, temos que $x \in \overline{A} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Portanto, como a escolha de x foi arbitrária, concluímos que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

B) Seja $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Então, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$.

1) se $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x$.

Isto é, existe uma sequência $(x_n) \subset A \subset A \cup B$ tal que $x_n \to x$, e portanto, concluímos que $x \in \overline{A \cup B}$.

2º) Se $x \in \overline{B}$, mostramos analogamente que $x \in \overline{A \cup B}$.

Portanto, em qualquer um dos casos temos que $x \in \overline{A \cup B}$, e portanto, como a escolha de x foi arbitrária.

Concluímos $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

E pelos itens (A) e (B), mostramos que,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

04) Dado $a \in \overline{A \cap B}$. Então, $\exists (x_n) \subset A \cap B$ tal que $x_n \to a$.

Em particular temos que $(x_n) \subset A$ e tal que $x_n \to a$, e disso segue que $a \in \overline{A}$. Analogamente se mostra que $a \in \overline{B}$. Assim, concluímos que $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Pela arbitrariedade da escolha do ponto a concluímos que

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

A contenção contrária é falsa pois, por exemplo, sendo $A = (a.b)$ e $B = (b, c)$, segue que $\overline{A} = [a, b]$ e $\overline{B} = [b, c]$. Logo, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{b\}$. Por outro lado, $A \cap B = \emptyset$, e daí $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Logo,

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{b\} \not\subset \emptyset = \overline{A \cap B}.$$

05(a) Sejam $a \in M$ e $B(a,\varepsilon) \subset M$ uma bola aberta, para algum $\varepsilon > 0$. Vamos provar que esse conjunto $B(a,\varepsilon)$ é um aberto de M.

De fato, dado $x \in B(a,\varepsilon)$, então x é tal que:

$$d(x,a) < \varepsilon.$$

Portanto, basta tomar $\varepsilon_0 = min\{\frac{\varepsilon+a-x}{2}, \frac{x-a+\varepsilon}{2}\} > 0$. Dessa forma, obtemos que $B(x,\varepsilon_0) \subset B(a,\varepsilon)$, e pela definição de ponto interior, concluímos que $x \in int(B(a,\varepsilon))$.

Como a escolha de $x \in B(a,\varepsilon)$ foi arbitrária, concluímos que esse conjunto é um aberto de M.

(b) Seja $x \in int(A)$ qualquer, vamos mostrar que x é um ponto interior do conjunto $int(A)$.

De fato, como $x \in int(A)$, por definição segue que $\exists\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$. A partir daí, segue que $int(B(x,\varepsilon)) \subset int(A)$, e, pelo item anterior, temos que $B(x,\varepsilon)$ é um aberto de M, isto é, $int(B(x,\varepsilon)) = B(x,\varepsilon)$. Portanto, mostramos que $\exists\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset int(A)$, e pela definição de ponto interior, segue que $x \in int(int(A))$.

Isto é, dado $x \in int(A)$ qualquer, mostramos que x é um ponto interior desse conjunto, isto é, concluímos que $int(A)$ é um conjunto aberto em M.

Agora, para mostrar que ∂A é um fechado de M, basta mostrar que $(\partial A)^{\complement}$ é um aberto de M. Note que o conjunto $(\partial A)^{\complement}$ é dado por:

$$(\partial A)^{\complement} = \{x \in M : \ B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset \text{ ou } B(x,\varepsilon) \cap A^{\complement} = \emptyset, \text{ para algum } \varepsilon > 0\}.$$

Com isso, seja $a \in (\partial A)^{\complement}$. Logo, $\exists\varepsilon > 0$ tal que $B(a,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ ou $B(a,\varepsilon) \cap A^{\complement} = \emptyset$. Analisemos os casos:

- se $B(a,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, então temos que $B(a,\varepsilon) \subset A^{\complement}$. Tomando $y \in B(a,\varepsilon)$ qualquer, como mostramos que $B(a,\varepsilon)$ é um aberto de M, segue que $\exists\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(y,\varepsilon_0) \subset B(a,\varepsilon) \subset A^{\complement}$, isto é, $B(y,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset \Rightarrow y \in (\partial A)^{\complement}$. Pela arbitrariedade de y, segue que $B(a,\varepsilon) \subset (\partial A)^{\complement}$, e portanto $a \in int((\partial A)^{\complement})$;

- se $B(a,\varepsilon) \cap A^{\complement} = \emptyset$, então segue que $B(a,\varepsilon) \subset A$ e, seguindo o mesmo raciocínio feito acima, mostra-se que $B(a,\varepsilon) \subset (\partial A)^{\complement}$, e portanto $a \in int((\partial A)^{\complement})$.

Portanto, em qualquer caso, mostramos que dado $a \in (\partial A)^{\complement}$ temos que $a \in int((\partial A)^{\complement})$, isto é, $(\partial A)^{\complement}$ é um aberto de M.

Portanto, seu complementar ∂A é um fechado de M.

SOLUÇÃO:

7 Seja $x_n = \frac{1}{n}$. Como $x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N}$,

então $x_n \in \overline{X}, \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, temos que $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim, 0 também é um ponto aderente do conjunto X.
Logo, $0 \in \overline{X}$, e concluímos que $\overline{X} = X \cup \{0\}$.
Além disso, como X é enumerável, temos que $int(X) = \emptyset$, por proposição.
Portanto, concluímos que:

$$\partial X = \overline{X} \setminus int(X) = (X \cup \{0\}) \setminus \emptyset = X \cup \{0\}.$$

muito bom!

8. Seja X = (1, 1] ∪ {2}. Prove que (0, 1) ⊂ X' , 0 ∈ X' e 1 ∈ X'

⑧

Seja $X = (1,1] \cup \{2\}$. Vamos provar os itens

* $(0,1) \subset X'$. De fato, dado $x \in (0,1)$, temos que $\forall_\varepsilon > 0$, $\exists y \in X$, tal que

$$y \in B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}$$

Basta tomar $y = \min\left\{\frac{\varepsilon + x}{2}, 1\right\}$, e, desta forma, temos $0 < y \leq 1 \Rightarrow y \in X$ e $y \in B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}$.
Portanto, x é um ponto de acumulação de X, $\forall x \in (0,1)$, e concluímos que $(0,1) \subset X'$;

* $0 \in X'$. De fato, basta construir a sequência $(x_n) \subset X$ dada por $x_n = \frac{1}{n}$, onde $x_n \neq 0$, $\forall n$ e $x_n \to 0$. Portanto,

$$0 \in X';$$

* $1 \in X'$. De fato, tomando a sequência $(y_n) \subset X$ definida por $y_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, como $y_n \neq 1$, $\forall n$ e $y_n \to 1$ quando $n \to \infty$, concluímos que $1 \in X'$

15)

(b) Prove que se K é compacto, então o conjunto

$S = \{x + y : x, y, \in K\}$ também é compacto.

(b) Seja K um conj. compacto. Logo, pelo Teorema de Heine-Borel, segue que K é fechado e limitado. Como K é limitado, então $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq M$, $\forall x \in K$.

Vamos provar que o conj. $S = \{x + y : x, y \in K\}$ é um conj. compacto. De fato, S é limitado, pois $\forall x+y \in S$ tem-se que $|x + y| \leq |x| + |y| \leq M + M = 2M$.

Para provar que S é fechado, seja $(s_m) \subset S$ uma seq. convergente que possui limite s, vamos provar que $s \in S$. Como $(s_m) \subset S$, então $s_m \in S$, $\forall m$, e portanto, pela def. do conj. S temos que (s_m) é da forma $(s_m) = (x_m + y_m) = (x_m) + (y_m)$, onde $(x_m), (y_m) \subset K$. Sendo assim, como K é limitado pelo teorema de Bolzano-Weierstrass segue que $\exists (x_{m_k}) \subset (x_m)$ convergente. Denotando por:

$$\lim_{k \to \infty} x_{mk} = x_0.$$

Como K é fechado, temos que $x_0 \in K$. Além disso, se tomarmos a subseq $(y_{m_k}) \subset (y_m)$ com mesmos índices de (x_{mk}), temos que (y_{mk}) deve ser convergente (pois se não fosse, então o limite da subseq. $(x_{mk}) + (y_{mk}) = (x_{mk} + y_{m_k}) = s_{mk}$ não existiria, Um absurdo com o fato de que (s_n) ser convergente!. Denotando por:

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = y_0$$

Como K é fechado, então $y_0 \in K$, e ainda $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} + y_{n_k} = x_0 + y_0 \in S$, pela def. de

Por fim, notando que $(x_{n_k} + y_{n_k}) \subset (x_n + y_n) = (s_n)$ e $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} + y_{n_k} = x_0 + y_0 \in S$, como o limite de uma seq. convergente é único, e é igual ao limite de qualquer sub. seq sua, concluímos que:

$\lim_{n \to \infty} s_n = x_0 + y_0 = a \in S$, como queríamos mostrar.

Portanto, o conj. S é limitado e fechado e pelo teorema de Heine-Borel, segue que S é compacto.