L. 05)

7. Mostre que os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais:

(a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$.

$y = -x$ $\qquad$ $t = z$

$V = \mathbb{R}^4$

$W = \{(x,-x,z,z) : x, z \in \mathbb{R}\}$

Para mostrar que W é subespaço de $\mathbb{R}^4$, dados $\vec{u}, \vec{v} \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; precisamos mostrar que:

(i) $\vec{u} + \vec{v} \in W$; $\qquad$ (ii) $\alpha \cdot \vec{u} \in W$.

Tome $\vec{u} = (x,-x,z,z)$; $\vec{v} = (a,-a,b,b) \in W$. Assim:

(i) $\vec{u} + \vec{v} = (x,-x,z,z) + (a,-a,b,b) = (x+a, -x-a, z+b, z+b)$

$= (x+a, -(x+a), z+b, z+b) \in W$

(ii) $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x,-x,z,z) = (\alpha x, -\alpha x, \alpha z, \alpha z) \in W$

Assim, de (i) e (ii) segue que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. □

---

8. Considerando os subespaços vetoriais W e S do exercício anterior, determine os subespaços $S \cap W$ e $S + W$.

$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$.
$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y-t=0 \text{ e } z=0\}$.

Primeiramente, vamos determinar $S \cap W$.

$S \cap W$ será a sol. do sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ 2x + y - t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$x = -y$ $\qquad$ $t = 0$ $\qquad$ $x = 0$

$2x + y - t = 0$
$2(-y) + y + 0 = 0$
$-y = 0 \Rightarrow y = 0$

Logo, $\boxed{S \cap W = \{(0,0,0,0)\}}$.

Vamos agora determinar $S + W$.

$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = 2x+y \text{ e } z = 0\}$
$= \{(x,y,0,2x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x,0,0,2x) + (0,y,0,y) : x,y \in \mathbb{R}\} =$
$= \{x \cdot (1,0,0,2) + y \cdot (0,1,0,1) : x,y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,0,2); (0,1,0,1)]$

$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = -y \text{ e } t = z\}$
$= \{(-y,y,z,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = \{(-y,y,0,0) + (0,0,z,z) : y,z \in \mathbb{R}\}$
$= \{y \cdot (-1,1,0,0) + z(0,0,1,1) : y,z \in \mathbb{R}\} = [(-1,1,0,0); (0,0,1,1)]$

$$\boxed{S + W = [(1,0,0,2); (0,1,0,1); (-1,1,0,0); (0,0,1,1)]}$$

Obs.: Poderíamos, ainda, verificar se estes quatro vetores que geram S+W são L.I. ou L.D. Caso forem L.D., então um deles poderia ser retirado.

L5

30. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base para $\mathbb{R}^3$?
(a) $\{(1,1,-1);(2,-1,0);(3,2,0)\}$ (b) $\{(1,0,1);(0,-1,2);(-2,1,-4)\}$
(c) $\{(2,1,-1);(-1,0,1);(0,0,1)\}$ (d) $\{(1,2,3);(4,1,2)\}$

Faremos o item (a).

Para mostrar que $\beta = \{(1,1,-1);(2,-1,0);(3,2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, precisamos mostrar que

(i) β é L.I.;

(ii) $[\beta] = \mathbb{R}^3$.

(i) β é L.I.? Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a\cdot(1,1,-1) + b\cdot(2,-1,0) + c\cdot(3,2,0) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \quad a = 0$$

$$\begin{cases} 2b + 3c = 0 \\ -b + 2c = 0 \end{cases} \quad b = 2c \quad 2(2c) + 3c = 0 \quad 7c = 0 \quad c = 0 \quad b = 0$$

Logo, $a = b = c = 0$; e então, o conj. β é L.I.; mostrando que (i) vale.

(ii) $[\beta] = \mathbb{R}^3$? Como $[\beta] \subset \mathbb{R}^3$, basta mostrar que $\mathbb{R}^3 \subset [\beta]$.

Para isto, dado $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, precisamos mostrar que $\vec{u}$ se escreve como uma comb. linear dos vetores de $\beta = \{(1,1,-1);(2,-1,0);(3,2,0)\}$. De fato:

$$\vec{u} = (x,y,z) = a\cdot(1,1,-1) + b\cdot(2,-1,0) + c\cdot(3,2,0)$$

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ a - b + 2c = y \\ -a = z \end{cases} \quad a = -z \quad \begin{cases} -z + 2b + 3c = x \\ -z - b + 2c = y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2b + 3c = x + z \\ -b + 2c = y + z \end{cases} \quad \boxed{b = 2c - y - z}$$

$$2\cdot(2c - y - z) + 3c = x + z$$

$$4c - 2y - 2z + 3c = x + z$$

$$7c = x + z + 2y + 2z$$

$$c = \frac{x + 2y + 3z}{7}$$

$$b = 2c - y - z$$

$$b = 2\cdot\left(\frac{x + 2y + 3z}{7}\right) - y - z$$

$$b = \frac{2x + 4y + 6z - 7y - 7z}{7}$$

$$b = \frac{2x - 3y - z}{7}$$

Assim, obtemos

$$\vec{u} = (x,y,z) = -z(1,1,-1) + \frac{2x - 3y - z}{7}\cdot(2,-1,0) + \frac{x + 2y + 3z}{7}\cdot(3,2,0) \in [\beta]$$

Logo, vale (ii). Por (i) e (ii) segue que β é uma base para o $\mathbb{R}^3$. $\square$

16. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes sub-espaços vetoriais:

$$S = [(1,-1,2),(2,1,1)], \quad T = [(0,1,-1),(1,2,1)],$$

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 4x - z = 0\}$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - z = 0\}$.

Determine os subespaços $S+T$, $S \cap T$, $T+U$, $T \cap U$, $U \cap V$ e $U+V$.

EXTRA: Determine também $\dim(S+T)$; $\dim(S \cap T)$; $\dim(T+U)$, $\dim(T \cap U)$; $\dim(U \cap V)$; $\dim(U+V)$

• $S+T$:

$$S+T = [(1,-1,2);(2,1,1);(0,1,-1);(1,2,1)]$$

$\dim(S+T)$? Como $S+T \subset \mathbb{R}^3$, então $\dim S+T \leq 3$

Logo, o conj. $\beta = \{(1,-1,2);(2,1,1);(0,1,-1);(1,2,1)\}$ é L.D.

Vamos mostrar que $(1,-1,2)$ é comb. linear dos demais vetores de β.

De fato:

$$(1,-1,2) = a\cdot(2,1,1) + b\cdot(0,1,-1) + c\cdot(1,2,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = 1 \\ a + b + 2c = -1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \; + \qquad 2a + 3c = 1$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2a + 3c = 1 \end{cases} \quad - \qquad -2c = 0 \qquad c = 0$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 2a + 0 = 1 \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2}$$

$$a + b + 2c = -1$$
$$b = -1 - a - 2c$$
$$b = -1 - \frac{1}{2} - 2\cdot 0 \qquad b = -\frac{3}{2}$$

Logo, $(1,-1,2) = \frac{1}{2}\cdot(2,1,1) - \frac{3}{2}(0,1,-1) + 0\cdot(1,2,1)$

Logo, temos que

$$S+T = [(2,1,1);(0,1,-1);(1,2,1)]$$

Então, $\dim S+T \leq 3$. Se $\{(2,1,1);(0,1,-1);(1,2,1)\}$ for L.I., então $\dim(S+T) = 3$. Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a\cdot(2,1,1) + b\cdot(0,1,-1) + c\cdot(1,2,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases} \qquad (\ldots)$$

etc. ...

[para obter $\dim(S+T)$]

• $S \cap T = ?$

$$S = [(1,-1,2);\ (2,1,1)]$$
$$T = [(0,1,-1);\ (1,2,1)]$$

Note que; para obter $S \cap T$, precisamos representar os subespaços S e T utilizando equações para determinar a solução do sist. linear por eles formados, na qual representará $S \cap T$.

$$S = [(1,-1,2);\ (2,1,1)] = \{a\cdot(1,-1,2) + b\cdot(2,1,1) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\underbrace{a+2b}_{x},\ \underbrace{-a+b}_{y},\ \underbrace{2a+b}_{z}) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x,y,z) : x = a+2b,\ y = -a+b;\ z = 2a+b : a,b \in \mathbb{R}\} =$$

$(x-1)$

$$\begin{aligned} -x &= -\cancel{a} - \cancel{2b} \\ y &= -\cancel{a} + \cancel{b} \\ + \quad z &= \cancel{2a} + \cancel{b} \\ \hline -x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\}$$

Além disso, temos:

$$T = [(0,1,-1);\ (1,2,1)] = \{a\cdot(0,1,-1) + b\cdot(1,2,1) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(\underbrace{b}_{x},\ \underbrace{a+2b}_{y},\ \underbrace{-a+b}_{z}) : a,b \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = b;\ y = a+2b,\ z = -a+b : a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$x = b$$

$$\begin{aligned} y &= \cancel{a} + 2b \\ z &= -\cancel{a} + b \quad + \\ \hline y + z &= 3b \end{aligned} \Rightarrow y + z = 3x$$

$$3x = y + z$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - z = 0\}$$

Assim, temos:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\} \text{ e}$$
$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - z = 0\}$$

Logo, $S \cap T$ é a solução do sist. linear homogêneo:

$$+\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$$
$$\overline{2x = 0} \rightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} y + z &= 0 \\ -y - z &= 0 \end{aligned} \qquad y = -z$$

Ou seja, $\boxed{S \cap T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = -z\}}$

Os demais subespaços pedidos ficam como exercício. □