Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Cursos de Matemática e Física
Primeira Prova de Álgebra Linear I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO. **Data:** 06/10/2022.

Questão 01. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) (1,0 pt) Calcule det$A$ através da definição geral de determinante. Conclua que A é invertível.

(b) (1,5 pt) Obtenha a inversa de A através de operações elementares sobre linhas.

(c) (1,5 pt) Resolva o sistema linear $AX = B$, onde $X = (x \quad y \quad z)^t$ e $B = (0 \quad -3 \quad -1)^t$.

Questão 02. (2,0 pt) Verifique se o conjunto $\beta = \{2 - 3t,\, t + t^2,\, 1\}$ forma uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2, com suas operações usuais.

Questão 03. (1,0 pt) Seja V o espaço vetorial de todas as matrizes $n \times n$ com entradas reais, ou seja, $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, munido com suas operações usuais de adição de matrizes e produto de um escalar por uma matriz. Seja

$$W = \{A \in V \ : \ A^t = A\},$$

ou seja, o conjunto de todas as matrizes simétricas. Mostre que W é um subespaço vetorial de V.

Questão 04. (3,0 pt) Sejam $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}$ e $W = [(1, 0, -1); (2, 1, 0)]$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$. Obtenha $V \cap W$, $V + W$ e suas dimensões.

Questão 05. (1,0 pt) Seja V um espaço vetorial com dim $V = n$. Considere o conjunto de vetores

$$\beta = \{\vec{v}_1,\, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\},$$

formado por $n - 1$ vetores em V. Podemos montar uma base usando essa coleção? Justifique.

01) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) $\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \underbrace{0 \cdot A_{13}}_{=0}$

$= 2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12}$, onde:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-2) = 3$$

Assim,

$$\det A = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (3) = -4 + 3 = -1$$

Como $\det A = -1 \neq 0$, segue que A é inversível.

(b)

$$(A \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \to l_2 + l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_3 \hookrightarrow l_3 - 2l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3 \hookrightarrow l_3 + l_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \hookrightarrow l_2 - 3l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_1 \hookrightarrow l_1 - l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \hookrightarrow l_1 - l_2}$$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}}_{A^{-1}}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $$A \cdot X = B \iff A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$\iff \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{= I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\iff X = A^{-1} \cdot B \, .$$ Logo;

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 3 + 2 \\ 0 + 6 - 4 \\ 0 - 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ou seja, obtemos $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$.

---

02) $\beta = \{ 2 - 3t ; t + t^2 ; 1 \}$

AF. 01: β é L.I.: De fato; se

$$a \cdot (2 - 3t) + b \cdot (t + t^2) + c \cdot 1 = 0 + 0t + 0t^2,$$

segue que

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -3a + b = 0 \\ \boxed{b = 0} \end{cases} \qquad a = 0 \qquad c = 0$$

Logo, β é L.I.

Como são 3 vetores L.I. em P_2, e $\dim P_2 = 3$, segue que β é uma base para P_2.

[obs.: Ou, se quiser, mostrar que $P_2 = [\beta]$.]

03) Dados $A, B \in W$, então $A^t = A$ e $B^t = B$. Precisamos mostrar que:

(i) $A + B \in W$;

(ii) $\alpha . A \in W$ (onde $\alpha \in \mathbb{R}$).

De fato, note que

$$(A+B)^t = \underbrace{A^t}_{A} + \underbrace{B^t}_{B} = A + B$$

$\Rightarrow (A+B)^t = A + B$; logo, $A + B \in W$; provando (i). Por fim:

$$(\alpha . A)^t = \alpha . \underbrace{A^t}_{A} = \alpha . A$$

$\Rightarrow (\alpha A)^t = \alpha . A$. Logo, $\alpha . A \in W$.

Portanto, W é subespaço vetorial de V.

04) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$

$W = [(1,0,-1); (2,1,0)]$.

$W = \{a \cdot (1,0,-1) + b \cdot (2,1,0) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$= \{(\underbrace{a+2b}_{x}, \underbrace{b}_{y}, \underbrace{-a}_{z}) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} x = a + 2b \\ y = b \\ z = -a \end{cases} \Rightarrow x = -z + 2y$$

$\Rightarrow x - 2y + z = 0$

$\Rightarrow W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$

Assim, $V \cap W$ será a sol. do sist. homogêneo:

$$- \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$4y = 0 \Rightarrow y = 0$

e daí: $x + 2 \cdot (0) + z = 0 \Leftrightarrow x = -z$

Então:

$$V \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z \text{ e } y = 0\}$$

$$= \{(-z,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = [(-1,0,1)]$$

$$\Longrightarrow \dim(V \cap W) = 1.$$

Vamos agora determinar $V+W$ e sua dimensão

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+z=0\} =$$

$$x = -2y - z$$

$$= \{(-2y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(-2y, y, 0) + (-z, 0, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$= [(-2,1,0); (-1,0,1)]$$

Então:

$$V+W = [(-2,1,0); \boxed{(-1,0,1); (1,0,-1)}; (2,1,0)]$$

UM DESSE É MENOS O OUTRO!

$$= [(-2,1,0); (-1,0,1); (2,1,0)].$$

$\Rightarrow \dim(V+W) = 3$. (POIS OS 3 VETORES ACIMA SERÃO L.I)

---

05) $\dim V = n$.

Seja $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}\}$.

- Se β for L.I, então podemos montar uma base, completando com mais um vetor $\vec{w}$, de modo que

$$\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}\} \text{ seja L.I.}$$

- Se β for L.D., primeiro precisaremos eliminar os vetores, reduzindo a coleção até que fique L.I. :

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} \quad ; \quad k < n-1.$$

E, sendo agora uma coleção L.I, podemos completá-la como no caso anterior de modo a formar uma base.