Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 08 de Exercícios - Limites de funções

1. Usando a definição de limite, prove que

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{3}$ (c) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[3]{x} = 1$.

2. Dê um exemplo em que $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ existe mas nem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e nem $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existem.

3. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, mostre que $\lim\limits_{x\to a}[-f(x)] = -L$.

4. Mostre que
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-L) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h) = L.$$

5. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x & ,\text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & ,\text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
   Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, mas $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ se $a \neq 0$.

6. Usando a definição de limite, mostre que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então
$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

7. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X \setminus \{a\})$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, mostre que $L \in \overline{Y}$.

8. Use a definição de limite para provar que
$$\lim_{x\to 0} x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} = 0.$$
   Em seguida, use o Teorema do Sanduíche para provar o mesmo limite acima.

9. Suponha que para todo x, $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

10. **(Sel. Mestrado UFSM 2017/1)** Enuncie e prove o Teorema do Sanduíche para funções reais, de uma variável real. A seguir, utilize este teorema para provar que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que
$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2, \; \forall x, y, \in \mathbb{R},$$
    então f é constante.

11. Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ duas funções reais definidas em $A \subset \mathbb{R}$, tais que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$. Se $a \in A'$ e f e g tiverem limite no ponto a, mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

12. **(Sel. Mestrado UFSM 2011/1)** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ definida em $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que exista $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ é suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, a sequência $(f(x_n))$ seja convergente.