Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Espaços métricos e Topologia da reta

1. Seja X o conjunto das funções continuas em $[0,1]$ e seja $\varphi : [0,1] \to (0,+\infty)$ contínua. Defina
$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x)\, dx.$$
Mostre que (X,d) é um espaço métrico.

2. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Mostre que (M,d_1) e (M,d_∞) são espaços métricos, onde, para $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$,
$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \ \text{ e } \ d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$
Em seguida, defina e desenhe as bolas abertas de centro em $(0,0)$ e raio unitário em (M,d_1) e (M,d_∞).
Obs. Nunca mais ria do Quico do episódio do Chaves quando ele queria uma "bola quadrada" - ele só estava lidando com outra métrica diferente da euclidiana...

3. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que
$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$
é uma métrica em $\mathbb{R}^+$.

4. Seja $\mathfrak{B}(A,\mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas de A em $\mathbb{R}$ e defina
$$d : \mathfrak{B}(A,\mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(A,\mathbb{R}) \to [0,+\infty)$$
$$d(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|.$$
Mostre que d define uma métrica em $\mathfrak{B}(A,\mathbb{R})$. Em seguida, desenhe $B(f,\frac{1}{2})$, onde $f : A \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \cos(x)$ e $A = [0,\pi]$.

5. Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos. Mostre que a aplicação $d : X_1 \times X_2 \to [0,+\infty)$ definida por
$$d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$
define uma métrica em $X_1 \times X_2$, onde $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$.

6. Seja $X \neq \emptyset$ e $\mathfrak{F}$ a família de todos subconjuntos finitos de X. Prove que a função $d : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to [0,+\infty)$ definida por
$$d(A,B) = \mathrm{card}(A\Delta B)$$
define uma métrica em X.

7. Definimos o espaço de todas as sequências *limitadas pela norma do supremo*, e denotada por ℓ_∞, o conjunto
$$\ell_\infty = \{(x_n)_n \,:\, x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

(a) Dê exemplos de sequências em ℓ_∞, mostrando assim, que ℓ_∞ está bem definido.

(b) Defina a aplicação $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to [0, +\infty)$ por

$$d((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Mostre que (ℓ_∞, d) é um espaço métrico.

8. Mostre que uma sequência (x_n) converge para a em (X, d) se, e somente se, a sequência $(d(a, x_n))$ converge para 0 em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

9. Mostre que $(x_n, y_n) \to (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$, com a métrica usual se, e somente se, $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

10. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que

    (a) $\text{int}(X \cap Y) = \text{int}(X) \cap \text{int}(Y)$.

    (b) $\text{int}(X) \cup \text{int}(Y) \subset \text{int}(X \cup Y)$.

11. Mostrar com um exemplo que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\text{int}(X \cup Y) \neq \text{int}(X) \cup \text{int}(Y)$.

12. Se $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$, determine $\text{int}(A)$.

13. Qual é o interior do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x < y\}$ em relação a $\mathbb{R}^2$? Justifique.

14. Mostre que o subconjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

15. Mostre que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$.

16. Vimos na teoria a prova da Proposição 5.8, que diz: *"a interseção finita de abertos de $\mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{R}$"*. Em seguida, observamos que a interseção infinita de abertos pode não ser um aberto de $\mathbb{R}$. Explique por quê a prova da Proposição 5.8 fica inválida se o número de abertos for infinito.

17. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto finito. Mostre que $X^{\complement} = \mathbb{R} \setminus X$ é um aberto de $\mathbb{R}$.

18. Sejam A e B abertos de $\mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$. Prove que os conjuntos $A + B$ e $z + A$, definidos respectivamente por

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\} \quad \text{e} \quad z + A = \{z + a : a \in A\}$$

são abertos de $\mathbb{R}$.