Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 08 de Exercícios - Transformações Lineares - Parte I
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Vefifique quais aplicações abaixo são transformações lineres.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}2$, $T(x, y) = (x - y, x + y)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (\cos x, 2y, 2z)$.
   (c) $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $T(X) = P^{-1}XP$, onde P é uma matriz invertível.
   (d) $D : C^2([0, 1]) \to C([0, 1])$, $D(f) = f' - 2f''$.
2. Mostre que a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 2x - 3y + z$ é uma transformação linear.
3. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - 3y + z, x - z)$ é uma transformação linear.
4. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$ não é uma transformação linear.
5. (Sel. Mestrado UFSM 2015/2) Verifique que $T : P_2 \to P_2$ definido por
   $$T(f(t)) = \frac{df(t)}{dt} - f(t)$$
   é um operador linear.
6. (Sel. Mestrado UFSM 2018/1) Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, definida por
   $$T(p(x)) = p(0) + p(1)(x + x^2),\ \forall p(x) \in P_2(\mathbb{R}).$$
   Prove que T é uma transformação linear.
7. Seja V o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Seja B um elemento de V e considere a aplicação $\varphi_B : V \to V$ dada por
   $$\varphi_B(A) = A \cdot B - B \cdot A.$$
   Mostre que φ_B é uma transformação linear.
8. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$; $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Em seguida, obtenha $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (3, 2)$.
9. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 2) = (3, 2, 1)$ e $T(3, 4) = (6, 5, 4)$.
10. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (2, 3)$ e $T(0, 1) = (1, 4)$.
11. (Sel. Mestrado UFRGS/2007/2) Obtenha todas as transformações lineares $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $L(u) = 3u$, $L(v) = 3v$ e $L(w) = 3w$, onde $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 1, 1)$.

12. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,1) = (1,1,0)$.

13. Obtenha a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$L(1,1,1) = (4,12),\ L(1,1,0) = (0,4) \quad \text{e} \quad L(1,0,0) = (1,3).$$

14. Seja L o operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $L(1,2) = (2,1)$ e $L(0,-1) = (1,4)$.
    (a) Determine $L(2,-2)$.
    (b) Determine $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $L(x,y) = (1,3)$.

15. Seja $T : V \to V$ um operador linear e C o conjunto dos vetores de V que são deixados fixos por T, ou seja,
$$C = \{\vec{v} \in V \ : \ T(\vec{v}) = \vec{v}\}.$$
Mostre que C é um subespaço vetorial de V.

16. Sejam S e T os operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x,y) = (0,x)$ e $T(x,y) = (x,0)$. Mostre que $TS = 0$, mas que $ST \neq 0$. Mostre também que $T^2 = T$.

17. Sendo F, G e $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x,y) = (x,2y)$, $G(x,y) = (y, x+y)$ e $H(x,y) = (0,x)$, determinar $F+H$, $F \circ G$, $G \circ (H+F)$, $G \circ F$ e $H \circ F$.

18. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $S : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to P_3$ transformações lineares dadas, respectivamente, por
$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ z & x+y-z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12}t - a_{21}t^2 - a_{22}t^3.$$
Determine $S \circ T$.

19. Sejam $T_1, T_2 : U \to V$ e $T_3 : V \to W$ transformações lineares. Mostre que
$$T_3 \circ (T_1 + T_2) = T_3 \circ T_1 + T_3 \circ T_2.$$