Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 07 de Exercícios - Mudança de base
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Mostre que cada conjunto a seguir é uma base para o $\mathbb{R}^2$. Em seguida, determine as coordenadas do vetor $\vec{u} = (6, 2)$ em relação a cada uma das bases dadas.
(a) $\alpha = \{(3, 0); (0, 3)\}$ (b) $\beta = \{(1, 2); (2, 1)\}$
(c) $\gamma = \{(1, 0); (0, 1)\}$ (d) $\delta = \{(0, 1); (1, 0)\}$

2. Quais são as coordenadas de $\vec{u} = (1, 0, 0)$ em relação à base
$$\beta = \{(1, 1, 1); (-1, 1, 0); (1, 0, -1)\}$$
do $\mathbb{R}^3$?

3. Determinar as coordenadas do vetor $u = (2, 1, 4) \in \mathbb{R}^3$ em relação às bases:
(a) canônica; (b) $\beta = \{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 0, -1)\}$.

4. Mostre que os vetores $v_1 = (2, 6, 3)$, $v_2 = (1, 5, 4)$ e $v_3 = (-2, 1, 7)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$. Expresse o vetor $v = (3, 7, 1)$ como uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3. Quais são as coordenadas de v em relação à base $\{v_1, v_2, v_3\}$?

5. Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ em relação a cada base do $\mathbb{R}^3$ dada.
   (a) $\beta = \{(1, 1, -1); (1, -1, 1); (-1, 1, 1)\}$
   (b) $\beta = \{(1, 0, 0); (1, 2, 1); (0, 5, 2)\}$

6. **(Sel. Mestrado UFSM 2013/2)** Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{C}^3$, onde $v_1 = (1, 0, -i)$, $v_2 = (1 + i, 1 - i, 1)$ e $v_3 = (i, i, i)$. Mostre que β é uma $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}^3$. Encontre as coordenadas de um vetor $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ em relação a esta base.

7. Considere as bases β e γ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$:
$$\beta = \{(1, 1);\ (0, -1)\} \quad \text{e} \quad \gamma = \{(1, 2);\ (-1, 3)\}.$$
Obtenha a matriz de mudança de base $[I]^{\gamma}_{\beta}$. Em seguida, dado o vetor $\vec{u}$ tal que $[\vec{u}]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, obtenha $[\vec{u}]_{\beta}$ usando a matriz da mudança.

8. Ache a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 3)\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

9. Ache a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 3)\}$ para a base $\gamma = \{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 0, -1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Ache também a matriz de mudança da base γ para a base β.

10. No espaço $\mathbb{R}^2$ consideremos as bases $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ (canônica) e $\gamma = \{g_1, g_2, g_3\}$ relacionadas da seguinte maneira:
$$g_1 = e_1 + e_3$$
$$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$$
$$g_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$
Determinar as matrizes de mudança de base de β para γ e de γ para β.