L2

34. Dados A e B subconjuntos de $\mathbb{R}^+$ limitados e não vazio, definindo $A\cdot B = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, prove que $\sup(A\cdot B) = (\sup A)\cdot(\sup B)$ e $\inf(A\cdot B) = (\inf A)\cdot(\inf B)$.

$$A\cdot B = \{x\cdot y : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

mostrar: $\inf(A\cdot B) = (\inf A)\cdot(\inf B)$

Como A e B são limitados, em particular, são limitados inferiormente, i.e., $\exists\, m, n \in \mathbb{R}^+$ tais que $m \le x$ e $n \le y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$

Logo $m\cdot n \leq x\cdot y$, $\forall x\cdot y \in AB$

Ou seja $A\cdot B$ possui $m\cdot n$ como uma cota inferior. Como $A\cdot B \subset \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é arquimediano, segue que $\exists \inf(A\cdot B)$

Além disso,

$$\exists\, m_1 = \inf A \quad \text{e} \quad \exists\, m_2 = \inf B$$

Então, temos que, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$;

$$x\cdot y \geqslant m_1\cdot m_2$$

ou seja, $m_1\cdot m_2$ é uma cota inferior para o conj. AB. E, sendo $\inf(A\cdot B)$ a maior cota inferior para o conj. AB, segue que

$$m_1 m_2 \leq \inf(AB),$$

ou seja.

$$\boxed{(\inf A)\cdot(\inf B) \leq \inf(AB)} \quad (\mathrm{I})$$

Dado $\varepsilon > 0$. Então,

Como $\inf(A)$ é o ínfimo de A, então,

$\exists\, x_0 \in A$; $\exists\, y_0 \in B$ tais que

- $\inf A \leq x_0 < \inf A + \varepsilon$
- $\inf B \leq y_0 < \inf B + \varepsilon$

Então: $x_0\cdot y_0 < (\inf A + \varepsilon)(\inf B + \varepsilon)$

$$x_0\cdot y_0 < \inf A\cdot\inf B + \inf A\cdot\varepsilon + \inf B\cdot\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\underbrace{x_0 y_0}_{\in AB} < \inf A\cdot\inf B + \varepsilon\cdot(\inf A + \inf B + \varepsilon)$$

Como $x_0 y_0 \in AB$, então

$$\inf(AB) \leq x_0 y_0 < \inf A\cdot\inf B + \varepsilon\cdot(\inf A + \inf B + \varepsilon)$$

$$\inf(AB) < \inf A\cdot\inf B + \varepsilon\cdot(\inf A + \inf B + \varepsilon), \ \forall \varepsilon > 0$$

$$\boxed{\inf(AB) \leq \inf A\cdot\inf B} \quad (\mathrm{II})$$

De (I) e (II) segue a igualdade. $\square$

$\boxed{L2}$

35. Sejam A e B conjuntos não vazios de números reais e seja

$$\delta(A,B)=\inf\{|a-b| : a\in A,\, b\in B\},$$

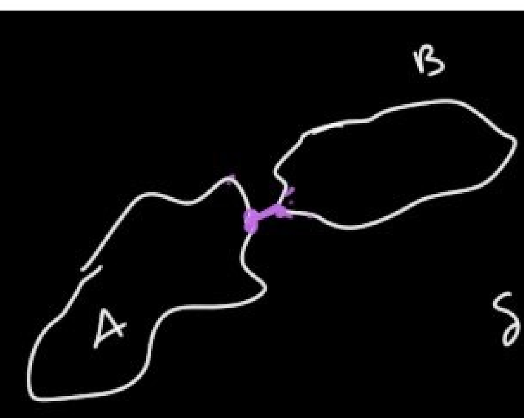
chamado de *"distância"* entre os conjuntos A e B.

(a) Se $A=\mathbb{N}$ e $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, determine $\delta(A,B)$.

(b) Se A e B forem conjuntos finitos, o quê $\delta(A,B)$ representa?

(c) Seja $B=[0,1]$. O quê a afirmação $\delta(\{x\},B)=0$ nos diz sobre o ponto x?

(d) Seja $B=(0,1)$. O quê a afirmação $\delta(\{x\},B)=0$ nos diz sobre o ponto x?

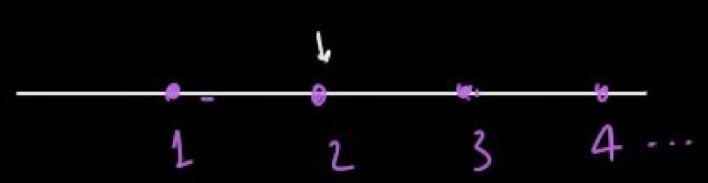


$$\delta(A,B)=\inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}}|a-b|$$

(a) $A=\mathbb{N}$; $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.

$$\delta(A,B)=\delta(\mathbb{N},\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})=$$

$$=\inf_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}}}|a-b|=0$$



$\forall a\in\mathbb{N}$, tome $b=a-\varepsilon$, $\forall\ 0<\varepsilon<1$.

Então $|a-b|=|a-(a\ \varepsilon)|=\varepsilon$

Logo, $\displaystyle\inf_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}}}|a-b|=\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$

ou seja,

$$\inf_{\substack{a\in\mathbb{N}\\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}}}|a-b|=0$$

(b) A e B finitos: $\delta(A,B)=?$

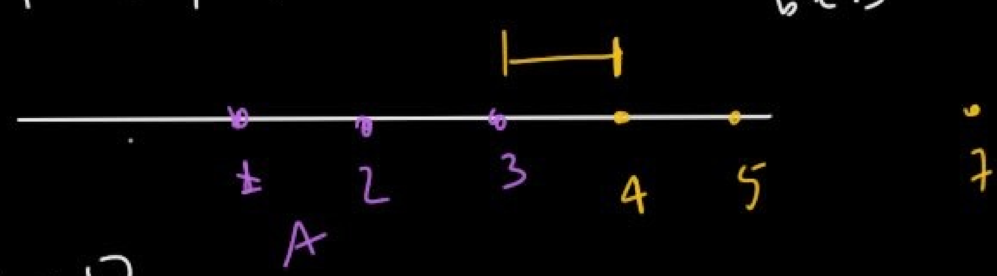
Sendo finitos A e B, então existem os elementos máx. e min.

Logo, $\displaystyle\delta(A,B)=\min_{\substack{a\in A\\ b\in B}}|a-b|$

$A=\{1,2,3\}$

$B=\{4,5,7\}$

$$\delta(A,B)=\min_{\substack{a\in A\\ b\in B}}|a-b|=|3-4|=1$$



(c) $B=[0,1]$. Se $\delta(\{x\},B)=0$

$$\delta(\{x\},B)=\inf_{\substack{a=x\\ b\in B}}|a-b|$$

$$=\inf_{b\in B}|x-b|=0$$

Neste caso, temos que $x\in B$ e podemos usar mínimo ao invés de ínfimo

(d) $B=(0,1)$. Se $\delta(\{x\},B)=0$, temos:

Neste caso, teremos $x\in B$ ou $x=0$ ou $x=1$.