Análise Real - Lista 02

(algumas resoluções)

すごい!

LISTA 02

03) Seja $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Vamos mostrar que

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

Como $x \neq 0$, segue que $\exists\, x^{-1} \neq 0$, onde x^{-1} denota o inverso multiplicativo de x. Assim, como $x^{-1} \neq 0$, então o mesmo possui inverso multiplic., ou seja,

$$\exists\, (x^{-1})^{-1} \neq 0.$$

Então,

$$(x^{-1})^{-1} \cdot (x^{-1}) = 1 \quad ;$$

e, multiplicando por $x \neq 0$, vem:

$$(x^{-1})^{-1} \cdot (x^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x \quad .$$

Pela associatividade:

$$(x^{-1})^{-1} \cdot [\underbrace{x^{-1} \cdot x}_{=1}] = x$$

$$\Rightarrow (x^{-1})^{-1} \cdot 1 = x \Rightarrow \boxed{(x^{-1})^{-1} = x.}$$

08) Vamos começar provando o caso geral: se $a<b$ e $0<r<1$, então

$$a < ra+(1-r)b < b.$$

Defina $f:(0,1) \to \mathbb{K}$ por

$$\begin{aligned} f(t) &= t\cdot a + (1-t)b \\ &= ta - tb + b \\ &= (a-b)\cdot t + b \end{aligned}$$

Agora, por hipótese, $a<b$. Então $a-b<0$. Assim, $\forall\, t \in \mathbb{K}$, com $0<t<1$, temos que, multiplicando esta cadeia de desigualdades por $a-b<0$, vem:

$$0<t<1 \underset{\times (a-b)<0}{\Longrightarrow} 0>(a-b)t>a-b$$

Somando b, vem:

$$b > (a-b)\cdot t + b > a - \cancel{b} + \cancel{b}$$

$$\Longrightarrow \quad a < \underbrace{(a-b)\cdot t + b}_{= f(t)} < b \;;$$

ou seja, $a < f(t) < b$, $\forall\, t \in (0,1)$; i.e.,

$$a < ta + (1-t)b < b, \quad \forall\, t \in (0,1);$$

e $\forall\, a<b$.

Por fim, em particular, se $t = \frac{1}{3} \in (0,1)$;

teremos:

$$a < f\left(\tfrac{1}{3}\right) < b \quad , \text{ i.e.;}$$

$$a < \frac{1}{3}a + \left(1 - \frac{1}{3}\right)b < b \quad , \text{ ou seja,}$$

$$a < \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b < b.$$

---

09) A prova é feita por indução sobre n.

(i) $n = 1$: $(1+x)^1 = 1 + x$. (ok!)

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha a desigualdade válida para um certo $n = k$, ou seja, que vale:

$$(1+x)^k \geq 1 + k\cdot x \quad , \quad x \geq -1.$$

Precisaremos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, vamos mostrar que

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\cdot x .$$

De fato:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)\cdot(1+x)^k \geq (1+x)\cdot(1+k\cdot x)$$

HIPÓTESE DA INDUÇÃO

$$= 1 + kx + x + k\cdot x^2 = 1 + (k+1)x + \underbrace{k\cdot x^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (k+1)\cdot x$$

$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Logo, vale (ii)

Por (i) e (ii) segue o resultado. $\square$

---

12) Por absurdo, suponha que $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$.

Então, $\exists\ p,q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\log_2 3 = \frac{p}{q}.$$

$p,q \in \mathbb{N}$ pois $\log_2 3 > \log_2 2 = 1 > 0$

Então,

$$2^{\frac{p}{q}} = 3 \Rightarrow \left(2^{\frac{p}{\cancel{q}}}\right)^{\cancel{q}} = 3^q \Rightarrow 2^p = 3^q,$$

mas tal igualdade é impossível para $p,q \in \mathbb{N}$. Absurdo!

Portanto, $\log_2 3$ é irracional.

---

18) Dado $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}] = \emptyset$.

Como $\emptyset \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}]$ é verdadeiro,

pois o conj. vazio é subconj. de qualquer conj., é suficiente mostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}] \subset \emptyset$.

Por absurdo, suponha que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \tfrac{y}{n}] \not\subset \emptyset .$$

Então, $\exists\, x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}]$; e disso,

$$0 < x_0 \leq \frac{y}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $x_0 > 0$ e $y > 0$, então $\frac{x_0}{y} > 0$.

Além disso, sendo $\mathbb{R}$ arquimediano, então $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n_0} < \frac{x_0}{y} \; ; \quad \text{i.e.,}$$

$$x_0 > \frac{y}{n_0} .$$

Logo, $x_0 \notin (0, \frac{y}{n_0}]$. $(**)$

Mas, por $(*)$, temos que $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}]$; e então, em particular, $x_0 \in (0, \frac{y}{n_0}]$, contradição com $(**)$.

Portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}] \subset \emptyset$. $\square$

21) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a < b + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

A mostrar: $a \le b$.

Por absurdo, suponha que $a > b$.

Vamos considerar os casos:

(i) Se $a, b > 0$:

Então, em particular, como por hipótese $a < b + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$, tomando $\varepsilon = a - b > 0$. Então,

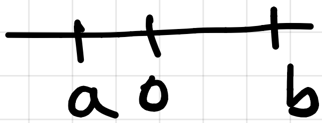
$$a < b + \varepsilon = \cancel{b} + (a - \cancel{b}) = a$$

$$\Rightarrow a < a. \quad (\text{Absurdo})!$$

Portanto, $a \le b$, neste caso.

(ii) Se $a < 0$ e $b > 0$; então,

tomando $\varepsilon = b - a > 0$,



teremos:

$$a < b + \varepsilon = b + (b - a) = 2b - a$$

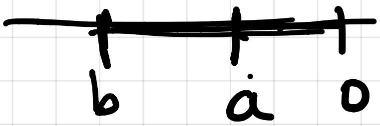
$$\Rightarrow a < 2b - a \Rightarrow 2a < 2b$$

$$\Rightarrow a < 2b - a \Rightarrow 2a < 2b$$

$$\Rightarrow a < b \text{ ; mas}$$

pela hipótese (*) temos $a > b$.
Absurdo! Logo, neste caso também temos $a \leq b$.

(iii) Se $a, b < 0$; com $|b| > |a|$

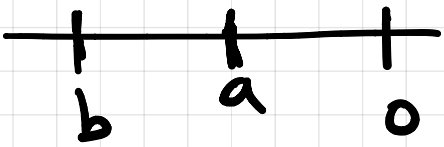


Então, tome

$$\varepsilon = a - b > 0,$$

e neste caso, c.f. o item (i), segue que $a \leq b$.

(iv) Se $a, b < 0$, com $|a| > |b|$



Então, em particular, para $\varepsilon = a - b > 0$, segue pelo item (i) que $a \leq b$.

Portanto, em qualquer caso segue que

$$a \leq b.$$

□

30) Seja $X = \{1 - \frac{1}{3n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

A mostrar: $\sup X = 1$.

Vamos denotar por $x_n = 1 - \frac{1}{3n^2}$ os elementos do conj. X.

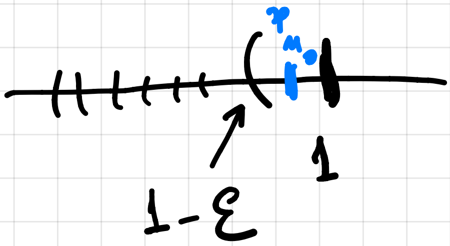
Isto posto, temos que:

(i) $x_n = 1 - \frac{1}{3n^2} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $M := 1$ é uma cota superior para o conj X.

(ii) Vamos mostrar que $M = 1$ é a menor cota superior para o conj X, i.e., mostraremos que

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \varepsilon < x_{n_0} \leq 1$. (*)



Por absurdo, suponha que (*) seja falso.

Então, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que

$$x_n < 1 - \varepsilon_0 \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$\cancel{1} - \frac{3}{n^2} < \cancel{1} - \varepsilon_0 \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{n^2} > \varepsilon_0 \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n^2}{3} < \frac{1}{\varepsilon_0} \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad n < \sqrt{\frac{3}{\varepsilon_0}} \,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \,;$$ ou seja,

concluímos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ficaria limitado superiormente por $\sqrt{\frac{3}{\varepsilon_0}}$, o que é um absurdo, pois $\mathbb{R}$ é arquimediano!

Portanto, vale $(*)$, provando (ii).

De (i) e (ii) concluímos que

$$\sup X = 1.$$

33) Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e limitado.

Seja $c > 0$.

Defina o conj.

$$c.A = \{ c.x \ : x \in A \}.$$

Vamos provar que

$$\sup(c.A) = c.\sup A$$

[a prova de que $\inf.(c.A) = c.\inf.A$ será análoga. Por isso, não a faremos].

AF-01: cA é não vazio. De fato, como $A \neq \emptyset$, $\exists\ a \in A$. Logo,

$c.a \in cA$, e disso,

segue que $cA \neq \emptyset$.

AF-02: $c.A$ é limitado superiormente.

De fato, como A é limitado, em particular é limitado superiormente.

Então, sendo $A \subset \mathbb{R}$, A limitado superiormente, segue que $\exists\ M = \sup A$.

Logo, $\forall x \in A$, $x \leq M = \sup A$.

Então, $c.x \leq c.M = c.\sup A$; $\forall cx \in cA$.
i.e., $c.M$ é uma cota superior para o conj. $c.A$, ou seja, cA é limitado superiormente

<u>AF-03</u>: $\sup cA = c.\sup A$.

Como cA é limitado superiormente, e como $cA \subset \mathbb{R}$, segue que $\exists \sup(cA)$.

Além disso, como vimos na <u>AF.02</u>, $c.M$ é cota superior para $c.A$; e disso segue que

$$\sup(cA) \leq c.M$$ [POIS $\sup cA$ É A MENOR COTA SUPERIOR]

ou seja,

$$\sup(c.A) \leq c.M = c.\sup A. \qquad (1)$$

Então, para provar a igualdade desejada, resta mostrar a desigualdade contrária.

Como $\sup A = M$, segue que
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$ tal que $M - \varepsilon < x_0 \leq M$ $(*)$

Como $c > 0$, então

$c.x_0 \in A$ e é tal que (por $(*)$)

$$cx_0 > c(M-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow c \cdot x_0 > c \cdot M - c\varepsilon \quad , \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow c x_0 \geq c \cdot M \qquad (**)$$

Como $\sup(cA)$ é cota superior do conjunto cA (é a menor), então

$$c x_0 \leq \sup(cA).$$

Por $(**)$ vem que

$$\underbrace{cM}_{\substack{\shortparallel \\ c \cdot \sup A}} \leq c \cdot x_0 \leq \sup(cA)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup(cA) \geq c \cdot \sup A} \qquad (\text{II})$$

De (I) e (II) segue que

$$\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A.$$

$\square$

37) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ e seja $a > 0$ fixado. Mostrar: $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < qa < y$$

De fato, como $a > 0$, então, de

$$x < y,$$

pela monotonicidade da multiplic., segue que

$$\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$$

com $\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$. Assim, pela densidade dos racionais em $\mathbb{R}$, segue que $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{x}{a} < q < \frac{y}{a}$$

e então, multiplicando por $a > 0$, vem

$$x < a.q < y$$

como queríamos mostrar.

$\square$