Resolução de exercícios da Lista 04

(Feita pelos alunos das Turmas M1 e M2)

01. Calcule os seguintes determinantes:

(C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2 \\ L_4 \leftrightarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$ $\rightarrow C = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

10,0

$\mapsto \det C = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mapsto (5-18) - (4-90) \rightarrow -13 - (-86)$

$-(4-90+0) \quad (5-18+0)$

$\rightarrow -13 + 86 = 73$

$\rightarrow \det C = 1 \cdot 1 \cdot 73 \rightarrow \boxed{\det C = 73}$

2) Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & 1 & x \\ 1 & y & y^2 & 1 & y \\ 1 & z & z^2 & 1 & z \end{vmatrix}$$

$= 1yz^2 + 1xy^2 + x^2z - (1yx^2 + 1zy^2 + 1xz^2)$

$= yz^2 + xy^2 + x^2z - x^2y - y^2z - xz^2$

$= yz^2 + x^2z - xz^2 + xy^2 - x^2y - y^2z - xyz + xyz$

$= z(yz + x^2 - xz - xy) - y(-xy + x^2 + yz - xz)$

$= (yz + x^2 - xz - xy)(z - y)$

$= (z(y-x) - x(-x+y))(z-y)$

$= (y-x)(z-x)(z-y)$

③ Sem calcular, justifique por que $x=0$ e $x=2$ satizfazem a eq.: $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$

10,0

Seja A a matriz $A = \begin{bmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, assim:

• se $x=0$ temos $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, daí, fazendo

$L_3 \leftrightarrow L_3 - \frac{5}{2}L_1 \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e como A^* tem uma linha nula, segue que $\det A^* = 0$. Por outro lado, por proposição, substituindo uma linha de A pela soma dela com um múltiplo de uma outra linha, o determinante não se altera, isto é, $\det A^* = \det A$.

Logo, como $\det A^* = 0$, segue que $\det A = 0$.

• se $x=2$, então $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, daí, fazendo

$L_2 \leftrightarrow 2L_2 \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, como A^* tem duas linhas iguais, segue que $\det A^* = 0$. Por propos., multiplicando uma linha de A por algum $K \in \mathbb{R}^*$, o determinante dessa nova matriz será $K \det A$.

Assim, $\det A^* = 2 \det A$, porém $\det A^* = 0$, então, $2 \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$

Muito bom!

Portanto, $x=0$ e $x=2$ satisfazem a equação.

4) Vimos que $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

Sendo $\det(A)$ e $\det(B)$ números reais, $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ ou $\det(B.A) = \det(B).\det(A)$ obtem-se o mesmo valor, pela propriedade dos números reais $a.b = b.a$.

(L04)(05) Se $\det M \neq 0$ e $MN = MP$, mostre que $N = P$.

Se o $\det M \neq 0$, então M é invertível e sua inversa é M^{-1}. Lo: $M \cdot M^{-1} = I$

Mostre que $N = P$.

Para isso, multiplique à esquerda por M^{-1} e resolva.

$\Rightarrow \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \cdot N = \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \cdot P$

$I \cdot N = I \cdot P$

$N = P$ □

Exercício 8. Uma outra maneira de definir que duas matrizes A e B são semelhantes é se existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}.A.P$. Mostre que se A e B são semelhantes, então $\det A = \det B$.

Como ideia iremos aplicar o determinante em ambos lados da equação

$$B = P^{-1}.A.P$$

Daí, obtemos

$$\det B = \det(P^{-1}\,A.P)$$

Sabemos que o determinante do produto é o produto dos determinantes

$$\det(AB) = \det A.\det B$$

Usaremos essa propriedade na questão a ser resolvida.

$$\det(P^{-1}AP) = \det P^{-1}\det A\det P = \det A \det P \det P^{-1}$$

Mas sabemos que

$$\det P \det P^{-1} = 1$$

Daí temos que

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det A$$

Portanto, A e B são semelhantes e $\det A = \det B$. ▣

9) A é uma matriz idempotente, ou seja $A^2 = A$. det A = ?

Se $A^2 = A$ então $A.A = A$. Sabemos que $\det(A.A) = \det A$, logo $\det A . \det A = \det A$

Aplicando $-\det$ de A dos dois lados da igualdade obtemos:

$-\det A + \det A . \det A = -\det A + \det A \Rightarrow \det . \det - \det A = 0 \Rightarrow \det A . (\det A - 1) = 0$ //

A partir das operações a cima vemos det A possui dois valores possíveis

$\det A = 0$ ou $\det A = 1$ //

Questão 10

1) Dizemos que uma matriz quadrada A é ortogonal se $A . A^T = I$. Dessa forma, se A for uma matriz ortogonal, mostre que $\det A = \pm 1$.

Podemos ver isso, sendo $A . A^T = I$, então

$\det(A . A^T) = \det I^{*} = 1$

$\det A . \det A^T$

$\det A . \det A^T = I$

e como $\det A = \det A^T$, temos:

$\det A . \det A = 1$

$(\det A)^2 = 1$

$\boxed{\det A = \pm 1}$ //

* O determinante de I = 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1 . 1 . 1 = 1$$

Porque é simplesmente fazer o produto dos elementos da diagonal principal

(11) $A^T . B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ e det $B = 2$
det $A = ?$

$$\det \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (3 . 6) - (4 . 4) = 18 - 16 = 2$$

(*) Como visto na aula (07), tem uma propriedade que diz: $\det(A^t) = \det A$, sendo assim $\det(B^t) = \det B$

(**) Segundo a propriedade 4 apresentada na aula (02), temos: $(A . B)^t = B^t . A^t$. Logo, temos que, $(B . A)^t = A^t . B^t$.

Também temos a propriedade que nos diz que: $\det(A . B) = \det A . \det B$

Sendo assim, como em (*), $\det(A^t) = \det A$, logo, $\det(B^t) = \det B$,

Contudo concluímos que após as substituições feitas:

$$\underbrace{\det(B . A)^t}_{2} = \underbrace{\det A^t}_{\det A} . \underbrace{\det B^t}_{2}$$

$$2 = \det A . 2$$

$$\det A = \frac{2}{2}$$

$$\boxed{\det A = 1}$$

(12) Se $AM = M.B$, M invertível, mostrar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$$\det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$$

Considere $\det((A-\lambda I).M)$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$)

$= \det(AM - \lambda IM)$ • distributividade do produto e propriedade da identidade

$= \det(MB - M\lambda)$ • $AM = MB$

$= \det(M(B-\lambda I))$ • distributividade do produto

Também, $\det(X.Y) = \det X . \det Y$, daí
$\det((A-\lambda I)M) = \det(M(B-\lambda I)) \Rightarrow \det(A-\lambda I)\det M = \det M \det(B-\lambda I)$

mas $\det M \neq 0$ pois M é invertível, assim,
$\det(A-\lambda I)\det M = \det M \det(B-\lambda I) \Rightarrow \det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$

Logo, $\det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

□

13 b) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x + 5y + z = 8 \\ -2x - y + 4z = 2 \end{cases}$ $x = \frac{dx}{d}$ $y = \frac{dy}{d}$ $z = \frac{dz}{d}$

$d = \left|\begin{matrix} 2 & +1 & -3 \\ 4 & +5 & +1 \\ -2 & -1 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{matrix}$

$-30 + 2 - 16 + 40 - 2 + 12$
$-48 + 54 = 6$ //

$dx = \left|\begin{matrix} 0 & +1 & -3 \\ 8 & +5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & +1 \\ 8 & +5 \\ 2 & -1 \end{matrix}$

$+\cancel{36}0 - \cancel{32}0 + \cancel{2} + 24$
$dx = 24$ //

$dy = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 8 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \\ -2 & 2 \end{matrix}$

$-48 - 4\,0 + 64\,0 - 24$
$dy = -12$ //

$dz = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 8 \\ -2 & -1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ -2 & -1 \end{matrix}$

$0 + 16 - 8 + 2\,0 - 16\,0$
$dz = 12$ //

$x = \frac{dx}{d} = \frac{24}{6} = 4$ //

$y = \frac{dy}{d} = \frac{-12}{6} = -2$ //

$z = \frac{dz}{d} = \frac{12}{6} = 2$ //

$\boxed{14}$ K e p?

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + Ky + z = p \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

a) que o sistema seja compatível determinado

det $\neq 0$

utilizando a regra de Cramer:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ p \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6K + 1 + 2 - (K + 3 + 4)$$
$$= 6K + 3 - K - 7$$
$$= 5K - 4$$

$\neq$ $5K - 4 = 0$

$5K = 4 \quad K = 4/5$

C

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ p & K & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8K + P + 4 - (2K + 4 + 4P)$$
$$= 8K + P + 4 - 2K - 4 - 4P$$
$$= 6K - 3P$$

✓

$\Rightarrow 6 \cdot \frac{4}{5} - 3P = 0$

$= \frac{24}{5} - 3P = 0$

$\Rightarrow -3P = -\frac{24}{5}$

$P = \frac{-\frac{24}{5}}{-3/1}$

$P = -\frac{24}{5} \cdot \frac{1}{-3} \Rightarrow P = \frac{-24}{-15} \Rightarrow P = \frac{24}{15}$ $= \frac{8}{5}$

logo $K \neq 4/5$ e $p \neq \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$ para que exista uma única solução

kajoma

(b) $\det A = 0$?

$K = 4/5$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4/5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{24}{5} + 1 + 2 - \left(\frac{4}{5} + 3 + 4\right)$$

$$= \frac{24}{5} - \frac{4}{5} + 3 - 7 = \frac{20}{5} - 4$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$p = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$

(c) Sei que o determinante principal é zero quando $K = 4/5$, agora vamos ver se o $\det A_1 = 0$ quando substituo $K = 4/5$ e $p = \frac{24}{15}$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ p & K & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ok...

$$\Rightarrow \det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 24/15 & 4/5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{32}{5} + \frac{24}{15} + \frac{2}{1} - \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{1} + \frac{96}{15}\right)$$

$$= \frac{96+24+30}{15} - \frac{12+60+96}{15}$$

$$= \frac{150}{15} - \frac{168}{15} = -\frac{18}{15} \quad \det A_1 \neq 0$$

Vamos tentar com o $\det A_2$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad p = \frac{24}{15}$$

$$= \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 24/15 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{144}{15} + 2 + 4 - \left(\frac{24}{15} + 6 + 8\right)$$

$$= \frac{144}{15} + 6 - \frac{24}{15} - 6 - 8$$

$$= \frac{120}{15} - 8 = 8 - 8 = 0$$

logo $\det A = 0$ e $\det A_2 = 0$, logo segue que o sistema é incompatível.

15. Determinar os valores de α e β de modo que o sistema seguinte seja indeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \alpha \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + \beta y + 3z = 14 \end{cases} \qquad C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & \beta & 3 & 14 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & \alpha \\ 0 & -5 & -3 & 5-2\alpha \\ 0 & \beta-6 & -3 & 14-3\alpha \end{array}\right] \quad L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2$$

$\beta - 6 - (-5) = \beta - 1$

$14 - 3\alpha - (5 - 2\alpha) = 9 - \alpha$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & \alpha \\ 0 & -5 & -3 & 5-\alpha \\ 0 & \beta-1 & 0 & 9-\alpha \end{array}\right]$$

Para que o sistema seja indeterminado, temos que ter uma linha nula, assim,

$\beta - 1 = 0$ e $9 - \alpha = 0$

$\boxed{\beta = 1}$ e $\boxed{\alpha = 9}$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 9 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 14 \end{cases}$$

Muito bom! Também poderia usar a regra de Cramer, mas assim ficou ótimo!

(16) Dada a matriz A, determinar sua inversa A^{-1} usando a matriz adjunta. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Note que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{11} + (-1)A_{12} + 3 \cdot A_{13}$

• $A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$ • $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

• $A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$

$\Rightarrow \det A = 2(-2) - (-2) + 3 \cdot 10 = -4 + 2 + 30 = 28$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

• $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

• $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

• $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9$

• $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7$

• $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-7) = 7$

• $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$

$$\Rightarrow \text{adj}A = \begin{bmatrix} -2 & 13 & -7 \\ -2 & -1 & 7 \\ 10 & -9 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{28} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 13 & -7 \\ -2 & -1 & 7 \\ 10 & -9 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{13}{28} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{1}{28} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{14} & -\frac{9}{28} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

17) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

calcule:

a) adj A. => matriz transposta dos cofatores da matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(0-5) = 5$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (0-10) = -10$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-(-3)) = -(3+3) = -6$

$A22 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-15) = 6 + 15 = 21$

$A23 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(2-5) = -(-3) = 3$

$A31 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-6) = 1 + 6 = 7$

$A32 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$

$A33 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$

MATRIZ COM COFATORES DE A:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -10 \\ -6 & 21 & 3 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPOSTA DOS COFATORES DE A:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \text{adj } A \,//$$

b) det A.

Usando a linha 2 da matriz A, aplicando o teorema de Laplace:

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot A21 + 2\,A22 + 1 \cdot A23 \\ &= 0 \cdot (-6) + 2(21) + 1(3) \\ &= 0 + 42 + 3 \end{aligned}$$

$\det A = 45 \,//$

c) A^{-1}

Como $\det A \neq 0$, A admite inversa e esta inversa pode ser obtida por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{45} & \frac{-6}{45} & \frac{7}{45} \\ \frac{5}{45} & \frac{21}{45} & \frac{-2}{45} \\ \frac{-10}{45} & \frac{-2}{45} & \frac{4}{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{15} & \frac{7}{45} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{15} & \frac{-2}{45} \\ -\frac{2}{9} & \frac{-2}{45} & \frac{4}{45} \end{pmatrix}$$