Análise Real I
Resolução de algumas questões da Lista 03.

03) A função f é tal que manda $\frac{1}{2} \longmapsto 1$ (DESSA FORMA MANDAMOS UM ELEMENTO DE $(0,1)$ PARA A EXTREMIDADE 1), de forma $\frac{1}{3} \longmapsto \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} \longmapsto \frac{1}{3}$; ..., $\frac{1}{n} \longmapsto \frac{1}{n-1}$, ... de forma bijetiva para tais pontos. Nos outros casos, obviamente $x \longmapsto x$ é bijetiva. Portanto, f é bijetiva e então $(0,1) \sim (0,1]$.

04) Como $A \subset B$, defina $f: A \to B$ por $f(x) = x$. Então, f é injetiva e daí, $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B$.

5 Dados os conjuntos A, B e C.

Temos que $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B$, isso significa, por definição que $\exists\, f: A \to B$ injetiva.

Também temos $\text{card}\, B \leq C$, isso significa por definição que $\exists\, g: B \to C$ injetiva.

Agora, vamos considerar que $x, y \in A$, segue que

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)y \to g(f(x)) = g(f(y)) \to$

$f(x) = f(y) \to x = y$

Assim, provamos que $g \circ f$ também é injetiva, ou seja, $\exists\, h: A \to C$ injetiva, onde $h = g \circ f$, portanto

$\text{Card}\, A \leq \text{Card}\, C$

08) Para isso, precisamos tomar a função $f: \mathbb{N} \to A$ definida por $f(n) = \frac{1}{n}$.

Essa função é injetiva, pois,
$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$$
e sobrejetora, pois $\forall z = \frac{1}{n_0} \in A$ temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_0) = z$

Logo, $\mathbb{N} \sim A$, sendo assim, A é enumerável.

⑨ Seja a função $f: \mathbb{N} \to X$ definida por $f(n) = n + \sqrt{2}$. Essa função é bijetiva, pois:
$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + \sqrt{2} = n_2 + \sqrt{2} \Rightarrow n_1 = n_2$$
e sobrejetiva, pois $\forall z = n + \sqrt{2} \in X$ temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_0) = n + \sqrt{2} = z$. Portanto $X \sim \mathbb{N}$, ou seja, X é enumerável.

ou seja basta tomar $n_0 = n$.

10) Basta observar que $f: \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ definida por $f(n) = \ln(n)$ é bijetiva e, portanto, $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$, ou seja, $f(\mathbb{N}) = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável.

11) Suponhamos, por absurdo, que o produto cartesiano enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Ou seja,

Sejam A_i, $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, conjuntos enumeráveis. Como $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, também enumerável, podemos dispor seus elementos em uma lista:

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots)$$
$$x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots)$$
$$x_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots)$$
$$\vdots$$
$$x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots)$$
$$\vdots$$

Onde $x_{ji} \in A_i$, $\forall i$ e $\forall j \in \mathbb{N}$

Construindo o elemento $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots)$, com $b_1 \in A_1$ e $b_1 \neq x_{11}$; $b_2 \in A_2$ e $b_2 \neq x_{22}$; $b_3 \in A_3$ e $b_3 \neq x_{33}$; e assim por diante.

No geral, tomamos $b_i \in A_i$ e $b_i \neq x_{ii}$, $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Pela construção feita acima, concluímos que se $b_i \neq x_{ii}$, $\forall i$, então $b \neq x_i$, $\forall i$, e portanto $b \notin \prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

Mas, como tomamos $b_i \in A_i$, $\forall i$, concluímos que

$$b = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times \dots = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

Isso é um absurdo! Portanto, concluímos que o produto cartesiano enumerável de conjuntos enumeráveis é não enumerável.

(15) Prove que $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, dado por $f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^m \cdot 3^n$ é injetora. Disso, conclua que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

Seja a função $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, $f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^m \cdot 3^n$ é injetora, note que, se $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m'}{n'}\right)$, então $2^m \cdot 3^n = 2^{m'} \cdot 3^{n'} \Rightarrow m = m'$ e $n = n'$

Portanto, f é injetiva

Sabendo que $f = \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ é injetiva e $\mathbb{N}$ enumerável, pela proposição*, temos que, $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

(*) proposição: Seja $f: A \to B$ injetiva se B for enumerável então A também é enumerável.

---

16) $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow 2^m \cdot 3^n = 2^a \cdot 3^b \Rightarrow$

$\Rightarrow m = a$ e $n = b$.

Portanto, f é injetiva. Como $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ é injetiva e $\mathbb{N}$ é enumerável, por proposição segue que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

20) Repare que

$(0,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \dots \subset \mathbb{R}$ e tal união é disjunta, então,

$$\Big(\underbrace{\text{card}(0,1)}_{=c} + \underbrace{\text{card}(1,2)}_{=c} + \underbrace{\text{card}(2,3)}_{=c} + \dots\Big) \leq \text{card}\ \mathbb{R} = c$$

$$\Rightarrow \boxed{c + c + c + \dots = c}$$

21- Se $X \subset \mathbb{R}$ for enumerável, mostre que X^c é denso em $\mathbb{R}$.

$X \subset \mathbb{R}$. X é denso em $\mathbb{R}$.

$\overset{def.}{\Longleftrightarrow} \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x < y,\ \exists\, a \in X$ tal $x < a < y$

Dados $x, y \in \mathbb{R}: x < y$.

Suponha, por absurdo que X^c não é denso em $\mathbb{R}$.

Então, $\nexists\, a \in X^c$ tal que $x < a < y$.

Ou seja, $\forall z \in (x,y),\ z \notin X^c$, i.e;

$(x,y) \subset X$, com X enumerável.

Absurdo, pois (x,y) é não enumerável, pois

$(x,y) \sim (0,1)$

Absurdo!

Portanto, X^c é denso em $\mathbb{R}$.