Álgebra Linear I

Resolução de alguns exercícios da Lista 02, feita pelos alunos da turma M2

3- Se A e B são matrizes quadradas e A é inversível verifique

$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

Resolvendo o 1º lado:

$(A+B).(A^{-1}.A - A^{-1}.B) =$

$(A+B).(I - A^{-1}B) =$

$(A+B).I - (A+B).A^{-1}.B =$

$A+B - A.A^{-1}.B - B.A^{-1}.B =$

$A+B - I.B - BA^{-1}.B =$

$A + B - B - BA^{-1}B =$

Sendo: $A^{-1}.A = I$ e $A.A^{-1} = I$

Sendo $I.B = B$

$\boxed{R. 1º \text{ lado} = A - BA^{-1}B}$

10,0

Resolvendo o 2º lado:

$(A-B).A^{-1}(A+B) =$

$(A-B).(A^{-1}.A + A^{-1}.B) =$

$(A-B)(I + A^{-1}B) =$

$(A-B).I + (A-B).A^{-1}B =$

$A - B + \underbrace{A.A^{-1}}_{I}.B - BA^{-1}B =$

$A - B + B - BA^{-1}B =$

$\boxed{A - BA^{-1}B \quad R\ 2º \text{ lado}}$

Então, juntando:

$\boxed{A - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B}$

resolução.

④ a) $(I-A)^2 \overset{?}{=} (I-A)$ [ainda não sabemos isso]

$\hookrightarrow (I-A)^2 = (I-A) \Rightarrow (I-A).(I-A) = (I-A)$

$\Rightarrow (I.I - I.A - I.A + A.A) \Rightarrow (I^2 - A - A + A^2)$

$\Rightarrow (I^2 - 2A + A^2) \Rightarrow \underbrace{I - 2A + A}_{I-A} = I - A$ //

$\boxed{I^2 = I}$ $\boxed{A^2 = A}$

* Se verifica que "I-A" é idempotente.

//

b) $(2A-I).(2A-I) = I$ $\quad 4A^2 = 4A$

$(2A)^2 - 2A - 2A + I = I$

$4A^2 - 4A + I = I$

$\cancel{4A} - \cancel{4A} + I = I$

$I = I$ //

$(2A-I)^{-1} = (2A-I)$

* Se verifica que "2A-I" é inversível

05) Suponha A invertível. Logo, $\exists A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = I$ e $A^{-1} \cdot A = I$.

Então:

$$I = (I)^T = (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T \quad ; \quad (*)$$

e:

$$I = (I)^T = (A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue que A^T também é invertível, e sua inversa será

$$(A^{-1})^T.$$

Como a notação para inversa de uma matriz invertível X qualquer é X^{-1}, segue que

$$(A^{-1})^T := (A^T)^{-1} \quad \text{[A INVERSA DE } A^T\text{]}$$

06 | Suponha que A seja uma matriz inversível. Mostre que se $AB = AC$, então $B = C$. Dê um exemplo de uma matriz não nula A tal que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

10,0

MULTIPLICANDO POR

Se A é inversível, logo:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

=> APLICANDO A^{-1} nos dois lados da igualdade:

$(A^{-1})AB = A^{-1}(AC)$

$(A^{-1} \cdot A)B = (A^{-1} \cdot A)C$ P. ASSOCIATIVA

$IB = IC$

$\boxed{B = C}$

EX: $AB = AC$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = AC$, mas $B \neq C$

Muito bom!

(11) Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $A = BC$. Prove que se B é invertível, então qualquer sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz B a I_n também reduz A a C

Supondo que a forma escalonada reduzida por linhas de B_n seja I_n. Então, existe uma sequência de operações elementares sobre linhas que reduzem B a I_n.

PanAmericana

Temos que cada operação elementar sobre linhas pode ser efetuada multiplicando-se à esquerda da matriz B uma matriz elementar. Desta forma temos que:

como B é inversível, existem $E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrizes elementares tais que

$$E_k \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot B = I$$

Logo, de $A = B.C$, multiplicando também à esquerda por $E_1 . E_2 . \cdots . E_k$, respectivamente:

$$E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = \underbrace{E_k \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot B}_{= I} \cdot C$$

$$\boxed{C = E_k \cdot E_{k-1} \cdot \cdots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A}$$

O que nos mostra que as mesmas matrizes elementares que reduzem B a I_n, na mesma ordem, reduzem A a C.

E, como temos que cada matriz elementar está associada a uma operação elementar sobre linhas, temos o resultado.

12.a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $l_2 \hookrightarrow -2 \cdot l_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 2} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ 0 \cdot y = 2 \end{matrix}$, isto é, $0 = 2$ (Absurdo!)

Esta linha na matriz aumentada do sistema, onde todos os coeficientes das incógnitas são zeros e o termo independente é diferente de zero, indica que o sistema é impossível, ou incompatível. (planos paralelos)

12.b $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $l_2 \hookrightarrow l_2 - 2 \cdot l_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix}$

↪ zerou toda linha, isto indica que o sistema é indeterminado, ou seja, possui uma infinidade de soluções. (planos coincidentes)

14

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \xrightarrow{l_3 \hookrightarrow 7 l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \xrightarrow{l_2 \to -3 l_1 + l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

17 b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$, A matriz aumentada do sistema será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 5L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{7}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -11/7 & -10/7 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 7L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -11/7 & -10/7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ y - \frac{11}{7}z = -\frac{10}{7} \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Como $0 \neq 3$, segue que o sistema não tem solução.