6. Mostre que se card A = card C e card B = card D, com $A \cap B = \emptyset = C \cap D$, então card $(A \cup B)$ = card $(C \cup D)$. Dê um contra-exemplo mostrando que o resultado não vale quando os conjuntos não são disjuntos.

card A = card C

card B = card D

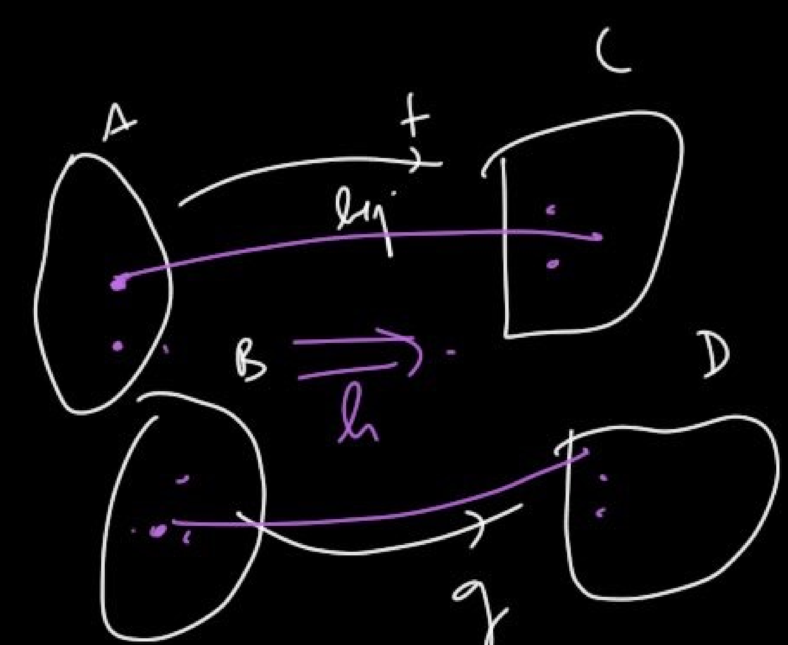
$\boxed{A \cap B = \emptyset}$

$C \cap D = \emptyset$

mostrar: card $(A \cup B)$ = card $(C \cup D)$

$\exists\, f : A \to C$ bij.

$\exists\, g : B \to D$ bij.



$h : A \dot\cup B \to C \cup D$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Como $A \cap B = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$, f e g são bijetivas bij.

então h será bijetiva, por construção

$A = (A \setminus B) \dot\cup (A \cap B)$ $\qquad$ $A \cup B = (A \setminus B) \dot\cup (A \cap B)$

$B = (B \setminus A) \dot\cup (A \cap B)$

$$\begin{cases} \text{card } A = \text{card } (A \setminus B) + \text{card } (A \cap B) \\ \text{card } B = \text{card } (B \setminus A) + \text{card } (A \cap B) \end{cases}$$

card $(A \cup B)$ = card $(A \setminus B)$ + card $(A \cap B)$ . . . . etc.

L3

16. Mostre que o conjunto $A = \left\{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$ é enumerável.

$\boxed{A \text{ é denso em } \mathbb{R}^+?}$

Define
$$f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to A$$
$$(m,n) \longmapsto \frac{m}{2^n}$$

$$f(m,n) = \frac{m}{2^n}$$

Como $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável. Assim, se mostrarmos que f é sobrejetiva, segue por proposição que A é enumerável.

De fato, dado $\frac{p}{2^q} \in A$. Basta tomar o par $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, que será tal que
$$f(p,q) = \frac{p}{2^q}.$$

Portanto, A é enumerável.

EXTRA:

$A = \left\{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^+$ A é denso em $\mathbb{R}^+$?

Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x < y$. Precisamos mostrar que $\exists\, \alpha \in A$ tal que
$$x < \alpha < y.$$

Como $x<y$, segue que $y - x > 0$.
Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\boxed{0 < \frac{1}{n_0} < y - x}$.

Além disso como $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}$ (pode ser feita a prova dessa desigualdade por indução), então obtemos
$$0 < \frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < y - x$$
$$0 < \frac{1}{2^{n_0}} < y - x$$
$$\Rightarrow \quad 1 < 2^{n_0}\cdot(y-x)$$
$$1 < 2^{n_0}\cdot y - 2^{n_0}\cdot x$$
$$1 + 2^{n_0}\cdot x < 2^{n_0}\cdot y \qquad (*)$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$m \leq 1 + 2^{n_0}\cdot x < m + 1 \qquad (**)$$
$$\cancel{1} + 2^{n_0}\cdot x < m + \cancel{1}$$
$$2^{n_0}\cdot x < m$$
$$\Rightarrow \boxed{x < \frac{m}{2^{n_0}}} \qquad (\text{I})$$

Além disso, de $(*)$ e $(**)$:
$$m \leq 1 + 2^{n_0}\cdot x < 2^{n_0}\cdot y$$
$$\Rightarrow m < 2^{n_0}\cdot y$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{2^{n_0}} < y} \qquad (\text{II})$$

De (I) e (II) segue que
$$x < \underbrace{\frac{m}{2^{n_0}}}_{\in A} < y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Logo, A é denso em $\mathbb{R}^+$.

L3

13. Use o método da diagonal de Cantor para mostrar que o conjunto de todas as sequências infinitas formadas apenas pelos dígitos 0 e 1 é não enumerável.

Seja X o conjunto de todas as listas infinitas formadas apenas por zeros e uns. $X \subset \mathbb{R}^{\infty}$

[Por exemplo,
$$x = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \in X$$
]

Por absurdo, suponha que X seja enumerável.
Assim, seja a seguinte enumeração para X:

$$\Rightarrow \boxed{X = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots \}}$$

onde
$$x_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots)$$
$$x_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots)$$
$$x_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots),$$
$$\vdots$$

onde $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Seja $x = (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$, onde $b_k \in \{0, 1\}$
e $b_i \neq a_{ii}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ (ou seja, por exemplo, se $a_{11} = 1$, então tomaremos $b_1 = 0$; se $a_{22} = 0$, tomaremos $b_2 = 1$, etc.)

Por construção temos que $x \in X$, pois ele é formado apenas por zeros e uns. No entanto, como $b_i \neq a_{ii}$, segue que $x \neq x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, ou seja, $x \notin X$. Absurdo!

Portanto, X é não-enumerável. $\square$