Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO. **Data:** 12/09/2022

Questão 01. Seja (A_λ) uma família de conjuntos indexada por $\lambda \in \Lambda$ em um universo E.

(a) [Peso 0,5] Se $B \subset E$, mostre que $B \setminus \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (B \setminus A_\lambda)$.

(b) [Peso 1,0] Considerando E o corpo ordenado dos números reais, $\Lambda = \mathbb{N}$, e $A_n = \left(0, \frac{3}{n}\right]$, prove que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset.$$

Questão 02. [Peso 0,5] Sejam a, b no corpo dos reais e $0 < r < 1$ tais que $|b-a| < r|a|$. Mostre que

$$|b| > (1-r)|a|.$$

Questão 03. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado não arquimediano.

(a) [Peso 1,0] Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais fica limitado superiormente em $\mathbb{K}$.

(b) [Peso 0,5] Conclua que, mesmo que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente em $\mathbb{K}$, não existe o $\sup \mathbb{N}$.

Questão 04. Dizemos que um conjunto $X \subset Y$ é *separável* em Y quando for denso (em Y) e enumerável.

(a) [Peso 0,5] Apresente um conjunto separável em $\mathbb{R}$, justificando sua separabilidade.

(b) [Peso 3,0] Prove que o conjunto $X = \{\frac{m}{5^n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ é separável em $\mathbb{R}^+$.

(c) [Peso 1,5] Seja $\mathbb{R}^\infty$ o conjunto de todas as listas infinitas de números reais. O conjunto X de todas as sequências (x_n) formadas apenas por *zeros*, *uns* e *dois* é separável em $\mathbb{R}^\infty$? Justifique, provando sua conclusão.

Questão 05. Sejam $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{R}^+ \to [-1,1]$ dadas, respectivamente, por

$$f(x) = x + 3 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

(a) [Peso 1,0] Prove que f e g são injetivas. Elas são sobrejetivas? Justifique.

(b) [Peso 0,5] Mostre que $\operatorname{card}[-1,1] = \operatorname{card}\mathbb{R}^+$, usando o item (a).

Questão extra.[1] Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano e considere $a > 1$ em $\mathbb{K}$.

(a) [Peso 1,5] Prove que $a^n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(b) [Peso 1,0] Mostre que $\forall x \in \mathbb{K}$, com $x > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a^{n_0}} < x$.

(c) [Peso 1,0] Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ definida por $f(n) = a^n$. Prove que $f(\mathbb{Z})$ é ilimitado superiormente.

(d) [Peso 2,0] Considerando a f acima definida, prove que $\inf f(\mathbb{Z}) = 0$.

[1] Esta questão é extra, você pode optar fazê-la e deixar de fazer outras, desde que sua pontuação nos pesos contabilize 10,0 pontos.

01) (a)

AF-01: $B \setminus \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (B\setminus A_\lambda)$:

Dado $x \in B\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$. Então $x\in B$ e $x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.
Ou seja, temos que

$x\in B$ e $x\notin A_\lambda$, $\forall \lambda\in\Lambda$, e disso

segue que $x \in B\setminus A_\lambda$, $\forall\lambda\in\Lambda$, donde segue que

$$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\setminus A_\lambda).$$

0,2

Logo, vale a AF-01, por força da arbitrariedade da escolha de x.

AF-02: $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\setminus A_\lambda) \subset B\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$:

Dado $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\setminus A_\lambda)$. Então, $x\in B\setminus A_\lambda$, $\forall\lambda\in\Lambda$,

0,3

i.e., $x\in B$ e $x\notin A_\lambda$, $\forall\lambda\in\Lambda$. Assim, temos que

$x\in B$ e $x\notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, e então $x\in B\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$.

Pela arbitrariedade da escolha de x, segue a AF 02.
Pelas afirmações 01 e 02 segue a igualdade desejada.

0,5

01) (b) Vamos mostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{3}{n}] = \emptyset$.

Como $\emptyset \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,\frac{3}{n}]$, é suficiente mostrar que

0,3

$$\emptyset \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,\frac{3}{n}].$$

Por absurdo, suponha que $\emptyset \not\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,\frac{3}{n}]$.

Então, $\exists\, x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,\frac{3}{n}]$, e disso segue que

$$x_0 \in (0, \tfrac{3}{n}], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano e $x_0 > 0$, segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \frac{x_0}{3}$.

0,7

Mas então $0 < \frac{3}{n_0} < x_0$, ou seja,

$$x_0 \notin (0, \tfrac{3}{n_0}],$$ uma contradição com (*).

Portanto, $\emptyset \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0,\frac{3}{n}]$, como queríamos mostrar. $\square$

1,0

02) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e $r \in (0,1)$ tais que

$$|b-a| < r.|a|. \quad (*)$$

Como por propriedade dos módulos vale que

$$|b-a| = |a-b| \geq |a| - |b|$$

então; juntando com $(*)$, obtemos

$$|a| - |b| \leq |b-a| < r.|a| ,$$

donde segue que

$$-|b| < r.|a| - |a| \quad \times(-1)$$

0,5

$$|b| > -r|a| + |a|$$

$$\Rightarrow \boxed{|b| > |a|.(r-1)}$$

03) Se $\mathbb{K}$ ordenado e não arquimediano.

Então, $\exists\, x_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 > 0$ tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \geq x_0$$

isto é a negação do conceito de corpo arquimediano: $\forall x \in \mathbb{K}$, $x > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < x$

1,0

Mas então temos que

$$n \leq x_0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja,}$$

o conj. $\mathbb{N}$ dos números naturais fica limitado superiormente em $\mathbb{K}$.

b) Neste caso, temos que $\exists\, A \in \mathbb{K}$ tal que

$$n \leq A, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

i.e., A é uma cota superior para o conj. $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$.

Então, como vale $\forall n$, em particular temos que

$$n+1 \leq A,$$

ou seja,

$$n \leq A-1, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

i.e. $A-1$ também é cota superior para $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$.

Ainda,

$$n+2 \leq A,$$ donde segue que

$$n \leq A-2, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja $A-2$ também é cota superior para $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$.

Seguindo indefinidamente, concluímos que 0,5

$$\cdots A-3 < A-2 < A-1 < A$$

são todas cotas superiores para $\mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$, não existindo, portanto, a menor cota superior.

Conclusão: $\nexists \sup \mathbb{N}$ em $\mathbb{K}$, mesmo $\mathbb{N}$ sendo limitado superiormente em $\mathbb{K}$.

04) (a) $\mathbb{Q}$ é separável em $\mathbb{R}$, pois vimos em aula que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, e é também enumerável.

(b) Vamos mostrar que

$$X = \left\{ \frac{m}{5^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ é}$$

separável em $\mathbb{R}^+$. Para isso, precisamos provar duas afirmações:

<u>AF. 01</u>: X é enumerável. De fato, defina

$$f : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ por}$$

$$f\left(\frac{m}{5^n}\right) = (m, n)$$

Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, basta mostrar que f é sobrejetiva para provar a enumerabilidade de X.

De fato, $\forall\, (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos que

1.0

$$\frac{p}{5^q} \in X \text{ e é tal que}$$

$$f\left(\frac{p}{5^q}\right) = (p, q), \text{ i.e., } f \text{ é sobrejetiva.}$$

Portanto, X é enumerável.

AF-02: X é denso em $\mathbb{R}^+$:

Seja $X = \left\{ \frac{m}{5^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $0 < x < y$.

Logo, $y - x > 0$. Como $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é arquimediano, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < y - x$.

Além disso, como $5^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (isso pode ser feito por indução sobre n), segue que

$$\frac{1}{5^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < y - x,$$ 0,5

e então

$$\frac{1}{5^{n_0}} < y - x, \quad \times (5^{n_0})$$

ou seja,

$$1 < y \cdot 5^{n_0} - x \cdot 5^{n_0},$$

donde segue que

$$1 + x \cdot 5^{n_0} < y \cdot 5^{n_0} \qquad (*)$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que 0,5

$$m \leq 1 + x \cdot 5^{n_0} < m + 1 \qquad (**)$$

Então,

$$\cancel{1} + x \cdot 5^{n_0} < m + \cancel{1}$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot 5^{n_0} < m \quad , \text{ i.e.,}$$

$$\boxed{x < \frac{m}{5^{n_0}}} \qquad (I)$$

0,5

De (*) e (**) obtemos também que

$$m \leq 1 + x \cdot 5^{n_0} < y \cdot 5^{n_0} \quad , \text{ i.e.,}$$

$$m < y \cdot 5^{n_0} \quad , \text{ ou seja,}$$

$$\boxed{\frac{m}{5^{n_0}} < y} \qquad (II)$$

0,5

De (I) e (II), obtemos

$$x < \underbrace{\frac{m}{5^{n_0}}}_{\in X} < y \quad ,$$

e isso $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$ com $x < y$, onde $\frac{m}{5^{n_0}} \in X$; ou seja, mostramos que X é denso em $\mathbb{R}^+$, provando a AF.02.

Pelas AFIRMAÇÕES 01 e 02 segue que X é separável em $\mathbb{R}^+$.

c) Seja $X \subset \mathbb{R}^\infty$ o conj. de todas as listas infinitas contendo apenas zeros, uns e dois.

[por exemplo, a lista infinita

$(0,1,2,0,1,2,0,1,2,\dots)$ é um elemento em X]

Vamos mostrar que X é não enumerável.
Feito isso, concluiremos então que X não é separável.

Por absurdo, suponha que X seja enumerável, e seja

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

uma enumeração para X, onde

$$x_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots)$$
$$x_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots)$$
$$x_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots),$$
$$\vdots$$

onde $a_{ij} \in \{0,1,2\}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$.

Seja $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ onde $b_j \in \{0,1,2\}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, mas tal que $b_1 \neq a_{11}$; $b_2 \neq a_{22}, \dots,$ $b_k \neq a_{kk}, \dots$

(método da diagonal de Cantor)

Então,
$$b \in X \qquad (*)$$
pois é formado por zeros, uns e 2;

mas $b \neq x_1$, pois $b_1 \neq a_{11}$;

(por exemplo, se $a_{11} = 1$, então $b_1 = 0$ ou $b_1 = 2$)

$b \neq x_2$, pois $b_2 \neq a_{22}$

$\vdots$

$b \neq x_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, ou seja, $b \notin X$,

um absurdo com $(*)$.

Portanto, X é não-enumerável.

Logo, X não é separável.

$\square$

1,5

---

05) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x+3$

$g: \mathbb{R}^+ \to [-1,1]$; $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

a)
- f é injetiva pois

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a + \cancel{3} = b + \cancel{3} \Rightarrow a = b.$$

0,3

- g é injetiva pois

$$g(a) = g(b) \Rightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{1}{b+1} \Rightarrow a + \cancel{1} = b + \cancel{1}$$
$$\Rightarrow a = b.$$

0,3

Nem f e nem g são sobrejetivas.

No caso de f, por exemplo, $1 \in \mathbb{R}^+$, mas

$\nexists$ $x \in [-1,1]$ tal que $f(x) = 1$, pois se existisse, então

0,2

$$x+3 = 1 \Rightarrow x = 2 \notin [-1,1].$$

No caso de g, por exemplo, $0 \in [-1,1]$ mas

$\nexists$ $x \in \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = 0$; pois se existisse, então

0,2

1,0

$$\frac{1}{x+1} = 0 \Rightarrow 1 = 0$$

(Absurdo)!

b) Pelo item (a) temos $f: [-1,1] \to \mathbb{R}^+$ e $g: \mathbb{R}^+ \to [-1,1]$ injetivas. Então, pelo Teorema de Cantor-Bernstein segue que

$$\exists \; h: [-1,1] \to \mathbb{R}^+ \text{ bijetiva.}$$

0,5

Logo, $[-1,1] \sim \mathbb{R}^+$, ou seja,

$$\text{card}\, [-1,1] = \text{card}\, \mathbb{R}^+.$$

$\square$

QUESTÃO EXTRA!

$\mathbb{K}$ - ordenado arquimediano. $a>1$, $a\in\mathbb{K}$.

(a) $a^n \geq n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Se $n\leq 0$, então como $a>1>0$, sendo $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, segue que

$$a^n > 0 \geq n.$$

Então, basta mostrar que $a^n\geq n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Isto será feito por indução sobre n.

(i) $n=1$, temos que

$$1^n = 1 \geq 1 = n. \quad \text{OK!}$$

Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha que a desigualdade seja verdadeira para um certo $n=k$, ou seja que $\boxed{a^k \geq k}$ $(*)$
Precisamos mostrar que vale para $n=k+1$, ou seja, precisamos mostrar que

$$a^{k+1} \geq k+1.$$

De fato: $a^{k+1} = a^k \cdot a \geq k\cdot a$, $\quad$ (I)

por $(*)$

Vamos mostrar que $k\,a > k+1$. $\quad$ (II)

De fato, se $k\,a \leq k+1$, então,

multiplicando por $\frac{1}{K} > 0$, vem:

$$\frac{1}{\cancel{K}} \cdot (\cancel{K}a) \leq \frac{1}{K} \cdot (K+1)$$

$$\Rightarrow \quad a \leq \frac{K+1}{K} = \frac{K}{K} + \frac{1}{K} = 1 + \frac{1}{K}$$

$\Rightarrow \quad a \leq 1 + \frac{1}{K}$, um absurdo, pois por hipótese temos $a > 1$. Logo, vale (II)

De (I) e (II) temos

$$\underbrace{a^{K+1}} \geq K \cdot a > \underbrace{K+1}, \text{ i.e.;}$$

$a^{K+1} > K+1$. Logo vale (ii)

De (i) e (ii) segue o resultado por indução; concluindo assim o item (a).

(b) Como $\mathbb{K}$ é arquimediano, $\forall x > 0$ segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n_0} < x$$

Pelo item (a) temos que $a^{n_0} \geq n_0$; e então

$$\frac{1}{a^{n_0}} \leq \frac{1}{n_0} < x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^{n_0}} < x.$$

(c) Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ dada por $f(n) = a^n$.

Vamos mostrar que $f(\mathbb{Z})$ é ilimitado superiormente.

[lembre-se que $X \subset \mathbb{K}$ é ilimitado superiormente se, e só se, $\forall\, a \in \mathbb{K}$, $\exists\, w \in X$ tal que $a < w$]

Dado $x \in \mathbb{K}$, $x > 0$. Tome $\frac{1}{x} > 0$.

Vamos obter um $w \in f(\mathbb{Z})$ tal que $x < w$.

Como $\mathbb{K}$ é arquimediano, pelo item (b), para $\frac{1}{x} > 0$ segue que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{a^{n_0}} < \frac{1}{x}.$$

Tomando os inversos, obtemos

$$\underbrace{a^{n_0}}_{= f(n_0)} > x,$$

ou seja, $f(n_0) \in f(\mathbb{Z})$ e é tal que $f(n_0) > x$,

ou seja, $f(\mathbb{Z})$ é ilimitado superiormente em $\mathbb{K}$.

(devido à arbitrariedade da escolha de $x > 0$ em $\mathbb{K}$).

(d) Sendo $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, $f(n) = a^n$, $a > 1$,

temos $f(\mathbb{Z}) = \{ a^n : n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{K}$.

Afirmamos que $\inf f(\mathbb{Z}) = 0$.

Como $a^n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue que, definindo $m := 0$, temos:

(i) $x \geq m = 0$, $\forall x \in f(\mathbb{Z})$, i.e., $m = 0$ é uma cota inferior para o conj. $f(\mathbb{Z})$.

(ii) Precisamos mostrar que $m = 0$ é a maior cota inferior para o conj. $f(\mathbb{Z})$, i.e., mostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 0 \leq a^{n_0} < 0 + \varepsilon \qquad (I)$$

Por absurdo, suponha que $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a^n \geq \varepsilon_0$. Então, para $n < 0$,

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \quad \text{onde } -n \in \mathbb{N}.$$

Então, temos que

$$\frac{1}{a^{-n}} \geq \varepsilon_0, \quad \forall -n \in \mathbb{N},$$

o que entra em contradição com o item (b);

pois para o $\varepsilon_0 > 0$, deveria existir $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\frac{1}{a^{n_0}} < \varepsilon_0$. Absurdo!

Logo, vale (I). Ou seja, segue (ii).

Portanto, de (i) e (ii) temos que

$$\inf . f(\mathbb{Z}) = 0.$$

$\square$