$\boxed{\text{LISTA 01}}$

09) Sejam $A = (a_{ij})_{m \times m}$ e $B = (b_{ij})_{m \times m}$ tais que

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a_{ij} = 0 \ , \text{ se } i > j \\ b_{ij} = 0 \ , \text{ se } i > j \end{array} \right. \quad \text{e}$$

Assim, seja $C = A.B$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Assim:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + \underbrace{a_{12} \cdot \underbrace{b_{21}}_{=0}}_{0} + \dots + a_{1m} \cdot \underbrace{b_{m1}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{11} = a_{11} \cdot b_{11}}$$

De modo geral, $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$, os elementos c_{kk} serão dados por

$$c_{kk} = \sum_{l=1}^{m} a_{kl} \cdot b_{lk} = \overbrace{a_{k1} \cdot b_{1k}}^{=0} + \overbrace{a_{k2} \cdot b_{2k}}^{=0} + \dots + \overbrace{a_{kk} \cdot b_{kk}}^{\neq 0} + \underbrace{a_{k,k+1} \cdot b_{k+1,k}}_{=0} + \dots + \underbrace{a_{km} \cdot b_{mk}}_{=0}$$

$$\Rightarrow c_{kk} = a_{kk} \cdot b_{kk} \ , \ \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$$

E, $\forall i > j$, teremos $\quad i > j \Rightarrow i > 1$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot b_{lj} = \underbrace{\overbrace{a_{i1}}^{=0} \cdot b_{1j}}_{0} + \underbrace{a_{i2} \cdot b_{2j}}_{=0} + \dots + \underbrace{a_{im} \cdot \overbrace{b_{mj}}^{=0}}_{=0}$$

$$= 0$$

---

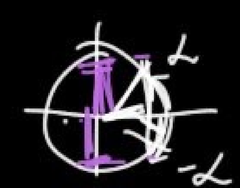
12)

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(a) $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$: De fato:

$$T_\alpha \cdot T_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}^{\cos(\alpha+\beta)} & \overbrace{-\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta}^{-\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \\ \underbrace{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha}_{= \operatorname{sen}(\alpha+\beta)} & \underbrace{-\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + \cos\alpha \cos\beta}_{\cos(\alpha+\beta)} \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = T_{\alpha+\beta}$$

(b) $T_{-\alpha} = T_\alpha^t$: De fato:

$$T_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -(-\operatorname{sen}\alpha) \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = T_\alpha^t$$

LISTA 02

18) Por exemplo, para resolver uma integral da forma $\int f(x)dx$, onde

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)},$$

a decomposição a ser feita é determinar as constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{x - 1}$$

se torne uma identidade. Determine os valores das constantes A, B, C e D para que a igualdade acima se torne uma identidade.

$$\frac{3x^3+4x^2-6x}{(x^2+2x+2)\cdot(x^2-1)} = \frac{(Ax+B)\cdot(x^2-1) + C\cdot(x-1)\cdot(x^2+2x+2) + D\cdot(x+1)\cdot(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$

$$3x^3+4x^2-6x = A\cdot x^3 - A\cdot x + Bx^2 - B + Cx^3 + 2Cx^2 + \cancel{2Cx} - Cx^2 - \cancel{2Cx} - 2C$$
$$+ D\cdot x^3 + 2Dx^2 + 2Dx + Dx^2 + 2D\cdot x + 2D$$

$$\begin{cases} A + C + D = 3 \\ B + C + 3D = 4 \\ -A + 4D = -6 \\ -B - 2C + 2D = 0 \end{cases}$$

Agora basta resolver este sist. linear por alguma técnica qualquer.

(...)

11. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $A = BC$. Prove que se B é invertível, então qualquer sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz B a I_n, também reduz A a C.

Suponha B invertível. Seja $e_1, e_2, \dots, e_k$ uma seq. de op. elementares sobre linhas que reduz B à I_n. $(B \sim I_n)$.

Sejam $E_1, E_2, \dots, E_k$ matrizes elementares correspondentes às respectivas op. elementares sobre linha acima descrita. Então:

$$\boxed{E_k \cdots E_2 E_1 B = I} \quad (*)$$

Como $A = B\cdot C$, então:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = \underbrace{E_k \cdots E_2 E_1 B}_{= I, \text{ por } (*)} \cdot C$$

Ou seja, obtemos

$$E_k \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I \cdot C = C,$$

ou seja, a mesma seq. de op. elementares $e_1, e_2, \dots, e_k$, na mesma ordem que na primeira seq., reduz a matriz A à matriz C, como queríamos mostrar. $\square$

LISTA 02.

10. Mostre que se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar, então $ab = 0$.

Obs.: Uma matriz elementar provém de uma ÚNICA operação elementar sobre linhas de I

Seja $\boxed{I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Podemos gerar A a partir de uma única op. elementar sobre linhas em I_3 se, e só se:

- $l_3 \hookrightarrow l_3 + a \cdot l_1$; $a \neq 0$. Assim, obtemos de I_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} = A$$

Logo, temos, neste caso, que $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$

Portanto $a \cdot b = 0$

- $l_3 \hookrightarrow l_3 + b \cdot l_2$; $b \neq 0$. Assim, obtemos de I_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 \hookrightarrow l_3 + b l_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} = A$$

Disso, segue que $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$

Portanto, $a \cdot b = 0$

Conclusão final: em qualquer dos casos segue que $\boxed{a \cdot b = 0}$

4. **Definição 1** Dizemos que uma matriz quadrada A é *idempotente* se

$$A^2 = A.$$

De acordo com a definição acima

(a) Mostre que se A é idempotente, então $I - A$ também é idempotente.
(b) Mostre que se A é idempotente, então $2A - I$ é invertível e é sua própria inversa.

(a) Precisamos verificar se $(I - A)^2 = I - A$

$$(I - A)^2 = (I - A) \cdot (I - A) = I - A - A + \underbrace{A^2}_{= A}$$

$$= I - 2A + A = I - A$$

Logo, $I - A$ é idempotente.

(b) A idempotente. Mostrar: $(2A - I) \cdot (2A - I) = I$

$A^2 = A$

De fato:

$$(2A - I) \cdot (2A - I) = 4 \cdot \underbrace{A^2}_{= A} - 2A - 2A + I = 4\cancel{A} - 4\cancel{A} + I = I$$

$I - A$ é idempotente

$\boxed{L2}$

5. Mostre que, se A for uma matriz invertível, então A^t também é invertível, com $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Seja A invertível. Vamos mostrar que A^t é invertível, com inversa $(A^{-1})^t$.

De fato, basta observar que:

$$(\bullet)\ A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I\ ;$$

e:

$$(AB)^t = B^t \cdot A^t$$

$$(\bullet\bullet)\ (A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I$$

Assim, de $(\bullet)$ e $(\bullet\bullet)$ segue que A^t é invertível, e sua inversa é $(A^{-1})^t$, ou seja,

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

$\square$

14. Sejam e_1, e_2 e e_3, respectivamente, as operações sobre linhas: *"Trocar as linhas ℓ_1 e ℓ_2"; "Substituir ℓ_3 por $7\ell_3$"* e *" Substituir ℓ_2 por $-3\ell_1 + \ell_2$"*. Determine as matrizes quadradas elementares de ordem 3 correspondentes E_1, E_2 e E_3.

$e_1 : \ell_1 \leftrightarrow \ell_2$; $e_2 : \ell_3 \hookrightarrow 7 \cdot \ell_3$; $e_3 : \ell_2 \hookrightarrow \ell_2 - 3\ell_1$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_1]{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} : E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_2]{\ell_3 \hookrightarrow 7 \cdot \ell_3} : E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_3]{\ell_2 \hookrightarrow \ell_2 - 3\ell_1} : E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$