LISTA 05

14. Seja B uma matriz fixa em $M_n(\mathbb{R})$. Mostre que os seguintes subconjuntos de $M_n(\mathbb{R})$ são subespaços:

(a) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ (b) $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = 0\}$

$V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \cdot B = B \cdot A\}$

B - fixo

$V \neq \emptyset$ pois $0 \in V$. pois

$0 \cdot B = 0$
$B \cdot 0 = 0$

Logo, V está bem definido.

Dados $X, Y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

precisamos mostrar que

(i) $X + Y \in V$; (ii) $\alpha \cdot X \in V$

(i): $(X+Y) \cdot B \overset{?}{=} B \cdot (X+Y)$

$(X+Y) \cdot B = X \cdot B + Y \cdot B = B \cdot X + B \cdot Y = B \cdot (X+Y)$

$X \in V \Rightarrow X \cdot B = B \cdot X$
$Y \in V \Rightarrow Y \cdot B = B \cdot Y$

(ii) $(\alpha \cdot X) B \overset{?}{=} B \cdot (\alpha X)$

$(\alpha \cdot X) B = \alpha \cdot (X \cdot B) = \alpha \cdot (B \cdot X) = (\alpha \cdot B) \cdot X = (B \cdot \alpha) X$
$= B \cdot (\alpha X)$

$X \in V \Rightarrow X \cdot B = B \cdot X$

Pelos itens (i) e (ii) segue que V é subespaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$

(b) exercício.

---

17. Escreva a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como uma combinação linear das matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ e } \ P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

solução: consiste em encontrar escalares α, β, γ

tais que

$A = \alpha \cdot M + \beta \cdot N + \gamma \cdot P$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha + 2\gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta - \gamma = -1 \end{cases}$

$\beta = 1 - \alpha$
$\beta = 1 - 3$
$\boxed{\beta = -2}$

$\beta - \gamma = -1$
$-2 - \gamma = -1$
$\gamma = -2 + 1$
$\boxed{\gamma = -1}$

Logo, obtemos

$\boxed{A = 3 \cdot M - 2N - 1 \cdot P}$

23. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V, prove que o conjunto $\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, 2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}\}$ também é L.I.

$\boxed{\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ é um conj. L.I em } V}$

mostrar que $\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, 2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}\}$ é L.I

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\boxed{a\cdot(\vec{u} - \vec{v}) + b\cdot(\vec{u} + \vec{w}) + c\cdot(2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}) = \vec{0}} \quad (**)$$

$$(a + b + 2c)\,\vec{u} + (-a - c)\,\vec{v} + (b + 2c)\cdot\vec{w} = \vec{0} \quad (*)$$

Como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é L.I. ; então, de $(*)$

segue que

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -a \quad + c = 0 \\ \quad b + 2c = 0 \\ \quad (\ldots) \end{cases}$$

Resolvendo este sist. linear homogêneo vamos obter $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$

Assim, de $(**)$ segue que

$\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, 2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}\}$ é L.I