Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios - Sequências ilimitadas e sequências de Cauchy

1. Se (x_n) é uma sequência tal que $x_n \to +\infty$, mostre que $\dfrac{1}{x_n} \to 0$.

2. Mostre que se (x_n) e (y_n) forem sequências tais que $x_n \leq y_n$, $\forall n \geq n_0$, e $x_n \to +\infty$, então $y_n \to +\infty$.

3. Prove que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = +\infty.$$

4. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de termos positivos. Se existir $c > 0$ tal que $x_n > c$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e se $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

5. Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = \infty$. (Sugestão: escreva $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$ e utilize a desigualdade $e^x > 1 + x$, $\forall x > 0$).

6. Mostre com um exemplo que o Teorema dos intervalos fechados encaixados é falso se os intervalos encaixados I_n não forem fechados. Mostre também que se os intervalos I_n não forem limitados o Teorema também é falso.

7. Mostre que a sequência (x_n) dada por $x_n = (-1)^n\dfrac{1}{n}$ é limitada. Extraia, em seguida, uma subsequência convergente.

8. Mostre que a sequência (x_n) definida por
$$x_n = \frac{(n^2 + 20n + 35)\,\mathrm{sen}\, n^3}{n^2 + n + 1}$$
possui uma subsequência convergente.

9. Prove que a sequência (x_n) dada por $x_n = \dfrac{\cos n\pi}{n}$ é de Cauchy.

10. Sejam $0 < r < 1$ e (x_n) uma sequência tais que $|x_{n+1} - x_n| < r^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a sequência (x_n) é de Cauchy.

11. Seja (x_n) sequência dada por $x_n = \sqrt{n}$. Mostre que (x_n) satisfaz
$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0,$$
mas que a sequência não é de Cauchy.

12. Seja (a_n) uma sequência definida recursivamente pela fórmula
$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}.$$
Mostre que a sequência é de Cauchy e encontre o seu limite.

13. Mostre que a sequência (x_n) definida por

$$x_n = \int_1^n \frac{\cos t}{t^2} dt$$

é de Cauchy.

14. Sejam (x_n) uma sequência e seja $s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que se $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, então existe uma subsequência de (x_n) convergente para s.