

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 05 de Exercícios - Espaços vetoriais
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Seja \mathbb{R}^∞ o conjunto de todas as seqüências infinitas de números reais, ou seja,

$$\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_i \in \mathbb{R}\},$$

munido da operações de adição

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).$$

Mostre que \mathbb{R}^∞ munido das operações acima é um espaço vetorial.

2. Em \mathbb{R}^n defina as operações

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{u} - \vec{v} \text{ e } \alpha \odot \vec{u} = -\alpha \cdot \vec{u}.$$

Quais axiomas de espaço vetorial são satisfeitos para $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$?

3. Verifique se são espaços vetoriais os seguintes conjuntos:

- (a) o \mathbb{R}^2 munido da adição usual e a multiplicação $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$.
- (b) o \mathbb{R}^2 munido da adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + 2x_2, y_1 + 2y_2)$ e a multiplicação por escalar usual.
- (c) o \mathbb{R}^2 munido da adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$ e a multiplicação por escalar usual.

4. Mediante quais circunstâncias o conjunto de todos os vetores soluções da equação

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

é um subespaço vetorial real do \mathbb{R}^n ?

5. Verifique se o conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ das matrizes 2×2 com entradas reais.

6. Quais dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^3 são subespaços vetoriais? Justifique sua resposta.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 \text{ e } y + z = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + 2y\}$

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$

7. Mostre que os seguintes subconjuntos do \mathbb{R}^4 são subespaços vetoriais:

(a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$.

(b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

8. Considerando os subespaços vetoriais W e S do exercício anterior, determine os subespaços $S \cap W$ e $S + W$.
9. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere o subconjunto

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}.$$

Desenhe $W \subset \mathbb{R}^2$ e verifique se W é um subespaço vetorial, justificando sua resposta.

10. Seja V o espaço vetorial real de todas as funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Quais dos seguintes conjuntos de funções são subespaços de V ?
- (a) de todas as funções f tais que $f(x^2) = f(x)^2$.
- (b) de todas as funções f tais que $f(0) = f(1)$.
- (c) de todas as funções f tais que $f(-1) = 0$.
11. Seja V o espaço vetorial de todas as funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Seja V_p o subconjunto de todas as funções pares, i.e., tais que $f(-x) = f(x)$; e seja V_i o subconjunto de todas as funções ímpares, i.e., tais que $f(-x) = -f(x)$. Prove que V_p e V_i são subespaços de V .
12. Mostre que se um conjunto W de um espaço vetorial V não contém o vetor nulo, então W não é um subespaço vetorial de V .
13. (Sel. Mestr. UFSM 2012/1) Se $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ é uma matriz 2×2 , definimos o seu traço por $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$. Mostre que o conjunto V das matrizes que têm traço igual a zero é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
14. Seja B uma matriz fixa em $M_n(\mathbb{R})$. Mostre que os seguintes subconjuntos de $M_n(\mathbb{R})$ são subespaços:
- (a) $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ (b) $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AB = 0\}$
15. Considere W o conjunto de toda f em $C[0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

W é um subespaço de $C[0, 1]$? Justifique.

16. No espaço vetorial \mathbb{R}^3 consideremos os seguintes sub-espaços vetoriais:

$$S = [(1, -1, 2), (2, 1, 1)], \quad T = [(0, 1, -1), (1, 2, 1)],$$

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 4x - z = 0\} \quad \text{e} \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y - z = 0\}.$$

Determine os subespaços $S + T$, $S \cap T$, $T + U$, $T \cap U$, $U \cap V$ e $U + V$.

17. Escreva a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como uma combinação linear das matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Considere o espaço vetorial $P_2 = \{at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

- (a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3 .
- (b) Determine uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja uma combinação linear de p_2 e p_3 .
19. Seja $V = C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de \mathbb{R} em \mathbb{R} , e considere os vetores $f = \cos^2 x$ e $g = \sin^2 x$. Quais dos seguintes vetores pertencem a $[f, g]$?
- (a) $\cos 2x$ (b) $3 + x^2$ (c) 1 (d) $\sin x$ (e) 0
20. Seja V o espaço vetorial das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Mostre que $f, g, h \in V$ dados abaixo são linearmente independentes:

$$f(t) = \sin t, \quad g(t) = \cos t \quad \text{e} \quad h(t) = t.$$

21. Os vetores $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 4)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, -5, 2)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, -4, 0)$ e $\vec{u}_4 = (2, 1, 1, 6)$ do \mathbb{R}^4 são L.I. ou L.D. ?
22. Mostre que o conjunto de vetores $\{1+x; 3x+x^2; 2+x-x^2\}$ é um conjunto linearmente independente em P_2 .
23. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V , prove que o conjunto $\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, 2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}\}$ também é L.I.
24. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V , prove que o conjunto $\{2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}, 3\vec{u} - 4\vec{v} + 5\vec{w}\}$ é L.D.
25. Mostre que, se u, v e w são vetores LI, então $u + v$, $u + w$ e $v + w$ também são LI.
26. Considere $V[a, b]$ como sendo o espaço de todas as funções reais de uma variável real t de $[a, b]$ em \mathbb{R} . Mostrar que os seguintes pares de vetores são LI:
- (a) t, t^2 . (b) te^t, e^{2t} . (c) $\sin t, \cos t$. (d) $\cos t, \cos 3t$.
27. Defina a *média* $u \star v$ entre os vetores de um espaço vetorial V pondo $u \star v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ se, e somente se, $u = w$.
28. Dados os espaços vetoriais V_1 e V_2 , considere o conjunto $E = V_1 \times V_2$, cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial.
29. (Sel. Mestrado UFRGS 2004/1) Sejam v_1, \dots, v_5 vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V . Dado $i = 1, \dots, 5$, defina

$$w_i = \sum_{j=1}^i v_j.$$

Prove que w_1, \dots, w_5 são linearmente independentes.

30. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base para \mathbb{R}^3 ?
- (a) $\{(1, 1, -1); (2, -1, 0); (3, 2, 0)\}$ (b) $\{(1, 0, 1); (0, -1, 2); (-2, 1, -4)\}$
(c) $\{(2, 1, -1); (-1, 0, 1); (0, 0, 1)\}$ (d) $\{(1, 2, 3); (4, 1, 2)\}$
31. Mostrar que os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{w} = (3, 0, 2)$ e $\vec{s} = (2, -1, 1)$ geram o \mathbb{R}^3 e encontrar uma base dentre estes vetores.
32. Mostre que $\mathbb{R}^3 = [(1, 1, 1); (1, 1, 0); (0, 1, 1)]$.

33. Mostre que $P_3 = [x^2 + x^3; x; 2x^2 + 1; 3]$.
34. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1 - t^2)$, $1 - t$ e 1 geram o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3 .
35. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto $\beta = \{(0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
- (a) Mostre que β não é uma base para \mathbb{R}^3 .
 - (b) Determine uma base para \mathbb{R}^3 que possua dois elementos de β .