Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 04 de Exercícios - Determinantes
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

2. Mostre que
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

3. Sem calcular o determinante, justifique por que $x = 0$ e $x = 2$ satisfazem a equação
$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$. Sabemos que o produto de matrizes, em geral, não comuta, ou seja, em geral tem-se que $A \cdot B \neq B \cdot A$. Isso vale também para $\det(A \cdot B)$ e $\det(B \cdot A)$? Justifique.

5. Se $\det M \neq 0$ e $MN = MP$, mostre que $N = P$.

6. Sejam A uma matriz $n \times n$ e α um escalar. Mostre que
$$\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A).$$

7. Se A é uma matriz 3×3 tal que $\det A = 8$, determine o valor de $\det(3A)$, justificando sua resposta.

8. Uma outra maneira de definir que duas matrizes A e B são *semelhantes* é se existir uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Mostre que se A e B são semelhantes, então $\det A = \det B$.

9. Se A for uma matriz idempotente, ou seja, tal que $A^2 = A$, quanto vale $\det A$?

10. Dizemos que uma matriz quadrada A é *ortogonal* se $A \cdot A^T = I$. Dessa forma, se A for uma matriz ortogonal, mostre que $\det A = \pm 1$.

11. Se $A^T B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $\det B = 2$, quanto vale $\det A$?

12. Se $A \cdot M = M \cdot B$, onde M é inversível, mostre que, para qualquer escalar λ, vale
$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I).$$

13. Use a regra de Cramer para resolver os sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \\ -2x + 2y - z = 8 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x + 5y + z = 8 \\ -2x - y + 4z = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x + y + z = 14 \\ -x + 2y + t = 3 \\ 3x - 2z - t = 11 \\ 4y + z - 3t = 7 \end{cases}$

14. Determine os valores de k e p de modo que o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ x + ky + z = p \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

seja:

(a) compatível determinado.
(b) compatível indeterminado.
(c) incompatível.

15. Determinar os valores de α e β de modo que o sistema seguinte seja indeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \alpha \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + \beta y + 3z = 14 \end{cases}$$

16. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a matriz inversa A^{-1} de duas formas: (a) usando o algoritmo de obtenção da inversa via operações elementares sobre linhas; (b) usando a matriz adjunta.

17. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule:

(a) $\operatorname{adj} A$.
(b) $\det A$.
(c) A^{-1}.