Álgebra Linear I

Resolução de alguns exercícios da L1, feita pelos alunos da Turma M2

10,0

(2) Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times3}$, definidas respectivamente por

$$a_{ij} = i - 2j \quad e \quad b_{ij} = \begin{cases} i-j, & se\ i > j \\ 1, & se\ i \le j \end{cases}$$

Determine $A+B$ e $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$a_{ij} = i - 2j$

$a_{11} = 1 - 2(1) = -1$

$a_{12} = 1 - 2(2) = -3$

$a_{13} = 1 - 2(3) = -5$

$a_{21} = 2 - 2(1) = 0$

$a_{22} = 2 - 2(2) = -2$

$a_{23} = 2 - 2(3) = -4$

$a_{31} = 3 - 2(1) = 1$

$a_{32} = 3 - 2(2) = -1$

$a_{33} = 3 - 2(3) = -3$

$b_{ij} = 1$, se $i \le j$

$b_{11} = 1$, pois $i \le j$

$b_{12} = 1$, pois $i \le j$

$b_{13} = 1$, pois $i \le j$

$b_{22} = 1$, "

$b_{23} = 1$, "

$b_{33} = 1$, "

$b_{ij} = i - j$, se $i > j$

$b_{21} = 2 - 1 = 1$

$b_{31} = 3 - 1 = 2$

$b_{32} = 3 - 2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1+1=0 & -3+1=-2 & -5+1=-4 \\ 0+1=1 & -2+1=-1 & -4+1=-3 \\ 1+2=3 & -1+1=0 & -3+1=-2 \end{vmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -10 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -6 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & -5 & & & \\ 0 & -2 & -4 & & & \\ 1 & -1 & -3 & & & \end{bmatrix}$$

Ok!

$$A \times B = \begin{pmatrix} -14 & -9 & -9 \\ -10 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

⑤ É verdade que se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$?

Não para todos os casos!

Assumindo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Logo: $(A \cdot B = 0) \neq (B \cdot A \neq 0)$

10,0 / 10,0

⑥ Mostre através de um exemplo que na álgebra das matrizes pode acontecer que o produto de dois elementos não nulos pode resultar no neutro aditivo (matriz nula).

$$A \cdot B = 0 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 & 2-2 \\ -2+2 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(8) Se $m = (m_{ij})_{n \times n}$

$\{m_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ $tr(m) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$

(A) Se A e B são matrizes $n \times n$, então prove que $Tr(AB) = tr(BA)$.

Sejam $A = [a_{ij}]_n$ e $B = [b_{ij}]_n$

TEMOS: $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ik}$ e $BA = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ik}$

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ik} \right)$$

produto É COMUTATIVO

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} a_{ik} \right) = Tr(BA)$$

PROPRIEDADE DOS SOMATÓRIOS

OK

(B) Se I é uma matriz identidade $n \times n$, então mostre que não existem matrizes A e B tais que $AB - BA = I$

Suponha, por absurdo, existir a matriz B que satisfaz a equação indicada. Aplicamos o traço sob a expressão:

$$tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0.$$

Por outro lado, a fim de que a equação seja satisfeita

$tr(AB - BA) = tr(I_{n \times n} = n)$, logo

chegamos ao absurdo que $n = 0$

Concluímos não haver solução para a equação.

12 a) [redacted]

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad T_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

10,0 / 10,0

$$T_\alpha T_\beta \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$T_{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

* Por ~~[illegible]~~ propriedades Trigonométricas temos:

L $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

L $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Sendo assim,

L $-\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = (-1)\cdot(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta)$

$= -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

Logo verifica-se que $\boxed{T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}}$

(12) b)

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$T_{-\alpha} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$T_\alpha^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Temos que:

Cosseno é uma função par, ou seja, $f(x) = f(-x)$.
Sendo assim, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ temos que $f(\alpha) = f(-\alpha)$
Logo $-\cos\alpha = \cos\alpha$

Ou seja,

$$\boxed{T_{-\alpha} = T_\alpha^t}$$

(13) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $A.A^T$ e $A^T A$.

Temos que $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, como $A_{2\times 3}$ e $A^T_{3\times 2}$,

existe $A.A^T$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$ //

E como $A^T_{3\times 2}$ e $A_{3\times 3}$, existe a matriz

$$A^T.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$ //

14

$$A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\rightarrow x^2 = 2x-1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

$A = A^t$

$\boxed{x = 1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

OK! MAS

MAIS SIMPLES SERIA NOTAR

QUE $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 1}$