

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 - Cardinalidade e enumerabilidade

1. Mostre que dois intervalos abertos (a, b) e (c, d) são equivalentes.
2. Sejam A, B, M e N conjuntos, tais que $A \sim M$ e $B \sim N$. Mostre que $A \times B \sim M \times N$.
3. Prove que $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{se } x = \frac{1}{n}, n \geq 2, \\ x & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é bijetora (disso, concluímos que $(0, 1) \sim (0, 1]$).

4. Sejam A e B conjuntos, tais que $A \subset B$. Mostre que $\text{card } A \leq \text{card } B$.
5. Dados A, B e C conjuntos, tais que $\text{card } A \leq \text{card } B$ e $\text{card } B \leq \text{card } C$. Mostre que $\text{card } A \leq \text{card } C$.
6. Mostre que se $\text{card } A = \text{card } C$ e $\text{card } B = \text{card } D$, com $A \cap B = \emptyset = C \cap D$, então $\text{card } (A \cup B) = \text{card } (C \cup D)$. Dê um contra-exemplo mostrando que o resultado não vale quando os conjuntos não são disjuntos.
7. Prove que $\text{card } (a, +\infty) = \text{card } (-\infty, 0)$, onde $a \in \mathbb{R}$.
8. Mostre que o conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável.
9. O conjunto $X = \{1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, \dots\}$ é enumerável ou não enumerável? Justifique.
10. Prove que o conjunto $X = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ é enumerável.
11. Prove que o conjunto \mathbb{I} dos números irracionais é não enumerável.
12. Prove a Proposição: “O produto cartesiano enumerável de conjuntos enumeráveis é não enumerável”. (Dica: Suponha, por absurdo, que o produto cartesiano enumerável de enumeráveis $A_1 \times A_2 \times \dots$ seja enumerável. Use o método da diagonal de Cantor e construa um elemento $b = (b_1, b_2, \dots)$ que pertenceria ao produto enumerável, mas que não é nenhum elemento $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots)$ da lista infinita construída para o produto, chegando, assim, numa contradição.)
13. Use o método da diagonal de Cantor para mostrar que o conjunto de todas as sequências infinitas formadas apenas pelos dígitos 0 e 1 é não enumerável.
14. Prove que $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ é não enumerável.
15. Prove que $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$, dada por

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = 2^m \cdot 3^n,$$

é injetora. Disso, conclua que \mathbb{Q}^+ é enumerável.

16. Mostre que o conjunto $A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ é enumerável.
17. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Mostre que $(a, b) \sim (0, 1)$, ou seja, qualquer intervalo aberto é equivalente ao intervalo $(0, 1)$. Conclua que $(a, b) \sim \mathbb{R}$ e que se $c < d$, então, $(a, b) \sim (c, d)$.
18. Mostre que a cardinalidade de \mathbb{R}^2 é \mathfrak{c} . Conclua daí, que a cardinalidade do conjunto \mathbb{C} dos números complexos também é o contínuo \mathfrak{c} . (Dica: Para a primeira parte do exercício, defina $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por: para $a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ e $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$,

$$f(a, b) = \begin{cases} 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots & \text{se } (a, b) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (a, b) = (0, 0) \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetora e daí, $\text{card}([0, 1] \times [0, 1]) = \mathfrak{c}$. Como $[0, 1] \sim (0, 1) \sim \mathbb{R}$, conclui-se que $\text{card} \mathbb{R}^2 = \mathfrak{c}$.)

Obs.: Note que a primeira parte deste exercício mostra que uma reta e um plano possuem a mesma cardinalidade, o contínuo \mathfrak{c} .

19. Prove que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ e que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
20. Prove que a união enumerável de conjuntos de cardinalidade \mathfrak{c} tem cardinalidade \mathfrak{c} . Em outras palavras, mostre que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \dots = \mathfrak{c}$.