Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 - Corpos

1. Seja E o espaço fundamental e considere o conjunto $F = \{A : A \subset E\}$, munido com as operações de união e intersecção de conjuntos. Mostre que $(F, \cup, \cap)$ não é um corpo.

2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Utilizando-se os axiomas, prove cada igualdade a seguir:

   (a) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

   (b) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

   (c) $-(-x) = x$

   (d) $-(x - y) = y - x$

3. Mostre que $(x^{-1})^{-1} = x\,, \forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo.

4. Mostre que, num corpo $\mathbb{K}$, se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Prove os seguintes fatos:

   (a) (*Unicidade do zero)* Se $0' \in \mathbb{K}$ é tal que $x + 0' = x\,, \forall x \in \mathbb{K}$, então $0' = 0$.

   (b) (*Unicidade da unidade)* Se $1' \in \mathbb{K}$ é tal que $x \cdot 1' = x\,, \forall x \in \mathbb{K}$, então $1' = 1$.

   (c) Dados $a, b \in \mathbb{K}$, mostre que a equação $a + x = b$ tem solução única.

   (d) Dados $a, b \in \mathbb{K}$, mostre que a equação $a \cdot x = b$ tem solução única.

6. Sejam x e y, ambos positivos em um corpo ordenado $\mathbb{K}$, com $x < y$. Prove que $y^{-1} < x^{-1}$.

7. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Prove as seguintes propriedades:

   (a) $x > y$ e $y > z \;\Rightarrow x > z$.

   (b) $x > 0$ e $y < 0 \;\Rightarrow x \cdot y < 0$.

   (c) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

8. Em um corpo ordenado, se $a < b$, mostre que $a < \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b < b$. Mais geralmente, mostre que
$$a < ra + (1 - r)b < b,$$
sempre que $a < b$ e $0 < r < 1$.

9. (Desigualdade de Bernoulli) Em um corpo ordenado, seja x qualquer elemento tal que $x \geq -1$. Prove que
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$
para todo inteiro positivo n.

10. Mostre que, em um corpo ordenado, $n < 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

11. Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

12. Mostre que o logaritmo de 3 na base 2 é irracional.

13. Prove cada afirmação a seguir caso seja verdadeira, ou exiba um contra-exemplo caso seja falsa:

    (a) A soma de dois números racionais é sempre racional.

    (b) A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

14. Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

15. Representar $\sqrt{5}$ sobre a forma de fração contínua.
    Sugestão: Escreva $\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2$.

16. Seja $K = \{p + q\sqrt{2} : p, q \in \mathbb{Q}\}$. Mostre que K satisfaz as seguintes propriedades:

    (a) Se $x, y \in K$, então $x + y \in K$ e $xy \in K$.

    (b) Se $x \in K$, $x \neq 0$, então $\frac{1}{x} \in K$.

17. Dado $a \in \mathbb{R}$, considere os intervalos $I_n = [a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$.
    item Dado $a \in \mathbb{R}$, considere os intervalos $J_n = (a, a + \frac{1}{n})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

18. Mostre que, para todo número real $y > 0$,
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}] = \emptyset.$$

19. Dados a, b, ε em um corpo ordenado $\mathbb{K}$, onde $\varepsilon > 0$. Prove que
$$|a - b| < \varepsilon \Longrightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

20. Dados x, y num corpo ordenado $\mathbb{K}$, com $y \neq 0$, prove que $|x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$.

21. Prove que $|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \geq a_3 - a_1$, com $a_1 < a_2 < a_3$.

22. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, prove que se para todo $\varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$, então $a \leq b$.

23. Se $0 < c < 1$, mostre que $0 < c^2 < c < 1$.

24. Se $c > 1$, mostre que $1 < c < c^2$.

25. Se $a < x < b$ e $a < y < b$, mostre que $|x - y| < b - a$. Interprete geometricamente.

26. Demonstre, no corpo dos reais, as seguintes desigualdades:

   (a) $|xy - ab| \leq |x||y - b| + |b||x - a|$

   (b) $|xy - ab| \leq (|x - a| + |a|)|y - b| + |b||x - a|$

   (c) $|xy - ab| < (1 + |a|)|y - b| + |b|$, se $|x - a| < 1$.

27. Considerando o corpo ordenado dos reais, determine δ_1 e δ_2 tais que

$$|x - \sqrt{2}| < \delta_1 \text{ e } |y - \sqrt{3}| < \delta_2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < \varepsilon,$$

   para $\varepsilon > 0$ dado. Sugestão: utilize o item (b) do exercício anterior.

28. Seja $A = \left\{ \dfrac{m+n}{m+n+1} \,:\, m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Mostre que $\sup A = 1$ e que $\inf A = \dfrac{2}{3}$.

29. Dado o conjunto $X = \{1 - \dfrac{(-1)^n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, conclua que $\sup X = 2$ e $\inf X = \frac{1}{2}$.

30. (Sel. Mestrado UFSM 2011/1) Considere o conjunto $X = \{1 - \frac{1}{3n^2} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que $\sup X = 1$.

31. Dados $A, B \in \mathbb{R}$ não vazios e limitados. Seja $A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Prove que:

   (a) $A + B$ é limitado;

   (b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup(B)$;

   (c) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

32. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita *limitada superiormente* se sua imagem $f(X) = \{f(X) \,:\, x \in X\}$, for um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Neste caso define-se o supremo de f, e denotamos por $\sup f$, como sendo o supremo do conjunto $f(X)$. Dadas dua funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, a soma $f + g$ é a função $f + g : X \to \mathbb{R}$, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

   (a) Prove que se $f + g : X \to \mathbb{R}$ são limitadas superiormente, então $f + g$ também é limitada superiormente, com

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

   (b) Mostre com um exemplo que no item anterior a desigualdade pode ser estrita (Sugestão: tome $X = [-1, 1]$, $f(x) = x$ e $g(x) = -1$).

33. Para $A \subset \mathbb{R}$ limitado e não vazio e $c > 0$, definindo $c \cdot A = \{cx \,:\, x \in A\}$, prove que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ e $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$.

34. Dados A e B subconjuntos de $\mathbb{R}^+$ limitados e não vazio, definindo $A \cdot B = \{xy \,:\, x \in A \text{ e } y \in B\}$, prove que $\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$ e $\inf(A \cdot B) = (\inf A) \cdot (\inf B)$.

35. Sejam A e B conjuntos não vazios de números reais e seja

$$\delta(A, B) = \inf\{|a - b| \, : \, a \in A, \, b \in B\},$$

chamado de *"distância"* entre os conjuntos A e B.

(a) Se $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, determine $\delta(A, B)$.

(b) Se A e B forem conjuntos finitos, o quê $\delta(A, B)$ representa?

(c) Seja $B = [0, 1]$. O quê a afirmação $\delta(\{x\}, B) = 0$ nos diz sobre o ponto x?

(d) Seja $B = (0, 1)$. O quê a afirmação $\delta(\{x\}, B) = 0$ nos diz sobre o ponto x?

36. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios tais que, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$. Mostre que $\sup A \leq \inf B$. Mostre que vale a igualdade se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $\exists y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

37. Sejam $a > 0$ um número real qualquer fixado e $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$. Mostre que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < qa < y$.