Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 03 de Exercícios - Matrizes invertíveis
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Utilizando-se do algoritmo para obter inversas de matrizes, encontre a inversa A^{-1} de A em cada caso, se A for inversível.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

2. Obtenha a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se existir.

3. Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Resolva-o aplicando operações elementares sobre linhas.

(b) Reescrevendo o sistema (1) na notação matricial

$$Ax = b\,, \tag{2}$$

podemos encontrar o valor da matriz-solução x, multiplicando (2) à esquerda por A^{-1}, se esta inversa existir. Encontre A^{-1} e obtenha o valor de x dessa forma. Compare sua resposta com a obtida no item anterior.

4. Resolva o sistema linear $AX = B$, "isolando" a variável X da equação dada, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Em que condições a matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$ é invertível e qual é sua inversa?

6. **Def.** Dizemos que uma matriz quadrada invertível M é ortogonal quando

$$M^{-1} = M^t.$$

(a) Mostre que uma matriz ortogonal M cumpre a propriedade $M \cdot M^t = M^t \cdot M = I$

(b) Verifique se a matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é ortogonal.

(c) Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é ortogonal, usando o item (a).