Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Lista 02 de Exercícios - Matrizes e Sistemas Lineares
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Mostre através de uma exemplo que na álgebra das matrizes, pode acontecer que o produto de dois elementos não nulos pode resultar no neutro aditivo (matriz nula).

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Se A for simétrica, ou seja, se $A^t = A$, encontre o valor de x.

3. Se A e B são matrizes quadradas e A é inversível, verifique que
$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

4. **Definição 1** Dizemos que uma matriz quadrada A é *idempotente* se
$$A^2 = A.$$
De acordo com a definição acima
   (a) Mostre que se A é idempotente, então $I - A$ também é idempotente.
   (b) Mostre que se A é idempotente, então $2A - I$ é invertível e é sua própria inversa.

5. Mostre que, se A for uma matriz invertível, então A^t também é invertível, com $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

6. Suponha que A seja uma matriz inversível. Mostre que se $AB = AC$, então $B = C$. Dê um exemplo de uma matriz não nula A tal que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

7. **(Sel. Mestrado UFSM 2009/1)** Nos itens abaixo, considere A, B, K e I matrizes $n \times n$, onde I é a matriz identidade.
   (a) Seja K uma matriz anti-simétrica, isto é, $K^t = -K$. Suponha que $I - K$ é não-singular[1]. Mostre que $(I + K)$ é não-singular. Se $B = (I + K)(I - K)^{-1}$, mostre que $B^tB = BB^t = I$.
   (b) Mostre que se A, B e $A + B$ possuem inversas, então o mesmo acontece com $(A^{-1} + B^{-1})$ e $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$.

8. Seja A uma matriz 3×3. Encontre uma matriz B para a qual BA é a matriz que resulta de A permutando as duas primeiras linhas e depois multiplicando a terceira linha por seis.

9. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$
   (a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1A = I$.
   (b) Escreva A^{-1} como um produto de matrizes elementares.

10. Mostre que se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar, então $ab = 0$.

[1]Matriz não-singular é um sinônimo para matriz invertível.

11. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $A = BC$. Prove que se B é invertível, então qualquer sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz B a I_n, também reduz A a C.

12. Considere os sistemas lineares $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

    (a) Mostre que o primeiro sistema não possui soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações.

    (b) Mostre que o segundo sistema tem uma infinidade de soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações.

13. Resolva cada sistema linear abaixo, pelo método de eliminação de Gauss-Jordan:

    (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

14. Sejam e_1, e_2 e e_3, respectivamente, as operações sobre linhas:
    "Trocar as linhas ℓ_1 e ℓ_2"; "Substituir ℓ_3 por $7\ell_3$" e *" Substituir ℓ_2 por $-3\ell_1 + \ell_2$".*
    Determine as matrizes quadradas elementares de ordem 3 correspondentes E_1, E_2 e E_3.

15. Reduza cada uma das matrizes abaixo à forma canônica escalonada reduzida por linhas.

    (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 19 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

16. Verifique se o sistema homogêneo abaixo possui uma solução não nula:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} .$$

17. Resolva cada sistema linear abaixo, através de operações elementares sobre linhas.

    (a) $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$

18. Uma técnica importante para resolução de integrais de funções racionais é decompor a expressão que define a função racional em frações parciais de uma forma adequada. Por exemplo, para resolver uma integral da forma $\int f(x)dx$, onde

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)},$$

a decomposição a ser feita é determinar as constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x - 1}$$

se torne uma identidade. Determine os valores das constantes A, B, C e D para que a igualdade acima se torne uma identidade.