Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista X de Exercícios (aulas 10.1 a 11.2) - Teoremas integrais

1. Sendo Ω um domínio do plano complexo, o Teorema da *fórmula integral de Cauchy* foi provado em discos, ou seja, se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, então, para todo disco D, com $\overline{D} \subset \Omega$, tem-se
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{z - z_0}, \ \ \forall z_0 \in D\,(\text{ e } \ z \in \partial D).$$
Porém, esse resultado vale para qualquer caminho fechado simples $\gamma \subset \Omega$, ou seja, sendo $\gamma \subset \Omega$ um caminho fechado simples em Ω e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, então, $\forall z_0 \in \text{int}(\gamma)$ (e $z \in \gamma$),
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$
Explique por quê.

2. Use a fórmula integral de Cauchy para calcular cada integral a seguir:
$$\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2}dz, \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z\,dz}{2z+i}, \quad \int_{|z|=2} \frac{\log(z+5)\,dz}{z^2 - 2iz + 3}.$$

3. Seja γ a fronteira do quadrado de lados sobre as retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, orientada no sentido positivo. Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}dz}{z - \frac{\pi i}{2}}$ (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z dz}{z(z^2+8)}$ (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{2z+1}$

(Resp.: (a) 2π (b) $\frac{\pi i}{4}$ (c) $-\frac{\pi i}{2}$)

4. Calcule $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos \pi z\,dz}{z^2 - 1}$ ao longo de um retângulo com vértices em $2 \pm i$ e $-2 \pm i$.

5. Calcule a integral $\displaystyle\int_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2+4z-3}$, fixando o ramo da função $\sqrt{z^2+4}$ pela condição $\sqrt{4} = -2$ e tomando para C o quadrado de vérices $\pm 1 \pm i$.

6. Seja γ um caminho fechado em $\mathbb{C}$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9}$ nos seguintes casos:

(a) o ponto $3i$ está no interior de γ e $-3i$ no exterior.

(b) os pontos $3i$ e $-3i$ estão no interior de γ.

(c) os pontos $3i$ e $-3i$ estão no exterior de γ.

7. Sendo γ a circunferência $|z| = 3$, calcule as integrais

$$\int_\gamma \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz \quad \text{e} \quad \int_\gamma \frac{e^{2z} dz}{(z+1)^4}.$$

(Resp.: $4\pi i$ e $8\pi i e^{-\frac{2}{3}}$)

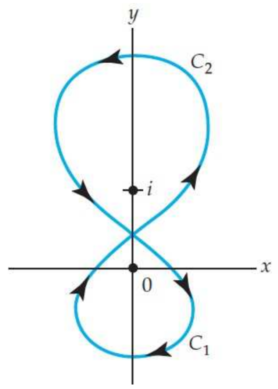
8. Determine o valor de $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin^6 z\, dz}{z - \frac{\pi}{6}}$ e $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin^6 z\, dz}{(z - \frac{\pi}{6})^2}$, onde γ é o circunferência $|z| = 1$.

(Res.: $\frac{\pi i}{32}$ e $\frac{21\pi i}{16}$.)

9. Calcule cada uma das integrais: (a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^3} dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^3} dz.$

(Resp.: em ambos os itens obtemos πi.)

10. Calcule $\displaystyle\int_C \frac{z^3 + 3}{z(z-i)^2} dz$, sendo C a curva dada na ilustração abaixo, com a orientação indicada [Observe que a curva C não é simples.] (Resp.: $-4\pi + 12\pi i$)



11. Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_n$, com $a_n \neq 0$ um polinômio de grau $n \geq 2$.

(a) Mostre que, para todo z com $|z| = r$, tem-se

$$|p(z)| \geq |a_n| r^n - |a_{n-1}| r^{n-1} - ... - |a_1| r - |a_0|.$$

Conclua que para $z \in D_r(0)$, com r suficientemente grande, tem-se

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{||a_n| r^n - |a_{n-1}| r^{n-1} - ... - |a_1| r - |a_0||}$$

(b) Use (a) para provar que

$$\left| \int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{p(z)} dz \right| \to 0 \quad \text{quando} \quad r \to \infty.$$

(c) Seja γ uma curva simples fechada que contém todas as raízes de $p(z)$ em seu interior. Mostre que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{p(z)} dz = 0.$$

12. Calcule $\displaystyle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}) d\theta$

(Resp.: $\frac{1}{4}$.)

13. Seja $f : D_r(0) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Use a fórmula integral de Cauchy para mostrar que

$$f^2(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(se^{i\theta}) d\theta,$$

para cada $0 < s < r$.

14. Se f é holomorfa numa região limitada por uma curva fechada simples γ e sobre ela, e se esta região contém o ponto z_0, prove que

$$[f(z_0)]^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[f(z)]^n}{z - z_0} dz, \ n \in \mathbb{N}.$$

15. Use a fórmula geral de Cauchy para calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz, \ n \in \mathbb{N}.$$

Em seguida, use o resultado obtido para provar que $n! \geq n^n e^{-n}$.

16. Sejam f uma função holomorfa em uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\} \subset \Omega$. Mostre que se $|f(z)| \leq M$ para todo z com $|z - a| = R$, então, para quaisquer $w_1, w_2 \in \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \frac{R}{2}\}$, tem-se

$$|f(w_1) - f(w_2)| \leq \frac{4M}{R} |w_1 - w_2|.$$

17. Seja Ω um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função complexa derivável. Suponha que o disco $D_3(0)$ e sua fronteira estejam contidos em Ω. Suponha também que $|f(z)| \leq 5$, $\forall z \in \partial D_3(0)$. Determine um limitante $M > 0$ para que $|f'(0)| \leq M$.

18. Seja Ω um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função complexa infinitamente derivável. Suponha que o disco $D_5(0)$ e sua fronteira estejam contidos em Ω. Suponha também que $|f(z)| \leq 7$, $\forall z \in \partial D_5(0)$. Determine um limitante $M > 0$ para que $|f'''(2i)| \leq M$. (Resp.: $\frac{70}{27}$.)

19. Seja f uma função inteira satisfazendo $|f(z)| \leq |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z) = az^2$, para alguma constante complexa a satisfazendo $|a| \leq 1$ (Sugestão mostre que $f'''(z) = 0$, $\forall z$).

20. Seja f uma função inteira tal que $|f(z)| \leq n^{\frac{3}{4}}$ quando $|z| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Prove que f é uma função constante.

21. Seja $\beta \in \mathbb{C}$. Mostre que para todo $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, tem-se
$$\left(\frac{\beta^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{\beta^n e^{\beta z}}{n! z^{n+1}} dz.$$

22. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira. Se $|f(z)| \leq \ln(|z| + 1)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, mostre que f é constante.

23. Use o Teorema de Morera para verificar que as seguintes funções são realmente holomorfas no interior de um disco de raio R centrado na origem:

    (a) $f(z) = z^n$, $n \geq 0$ (b) $f(z) = e^z$

24. Mostre que as derivadas sucessivas de uma função holomorfa em um ponto nunca satisfazem a desigualdade $|f^{(n)}(z)| > n! n^n$.

25. A função complexa $f(z) = \cos z$ é holomorfa em todo $\mathbb{C}$ (ou seja, inteira) e satisfaz a desigualdade $|\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. No entanto, f obviamente não é constante. Isto não entra em contradição com o teorema de Liouville?

26. É verdade que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$? Justifique.

27. Suponha que f seja uma função inteira tal que $f(0) = 0$ e $|f(z) - e^z \cos z| \leq 5$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Encontre uma fórmula para f.

28. Seja f uma função inteira, $f(z) = u + iv$, onde $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponha que exista $M \in \mathbb{R}$ tal que $u(x, y) \leq M$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante (Sugestão: considere $g(z) = e^{f(z)}$).

29. Determine o máximo de $|f(z)|$ em $|z| \leq 1$ para cada função a seguir.

    (a) $f(z) = z^2 - 3z + 2$ (b) $f(z) = z^4 + z^2 + 1$ (c) $f(z) = \cos 3z$

30. Seja $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 - 10}$, definida em $|z| \leq 2$. Mostre que $|f|$ tem um valor máximo e determine-o.

31. Usando o princípio do módulo máximo, prove o seguinte resultado, conhecido como **Teorema do módulo mínimo:** *Seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω região limitada, f não constante em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$, com $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Então, $|f|$ assume um valor mínimo em $\partial\Omega$.*

32. Seja $f(z) = \log z$, onde $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 2$ e $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$. Encontre o valores máximo e mínimo para $|f|$ e determine onde estes valores ocorrem.

33. Seja $f(z) = \operatorname{sen} z$. Ache $\max_{z \in K} |f(z)|$, onde $K = \{x + iy \,:\, 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$.

(Resp.: $\cosh 2\pi$)