Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista IX de Exercícios (aulas 8.3, 9.1 e 9.2+9.3) - Integração em $\mathbb{C}$

1. Descreva a curva $z(t) = a\cos t + ib \operatorname{sen} t$, $-\pi \leq t \leq \pi$, onde $a, b > 0$.

2. Descreva a curva $z(t) = t^3 + it^2$, $t \in [-1, 1]$. Essa curva é suave?

3. Mostre que a curva γ parametrizada por

$$z(t) = \begin{cases} t(\cos \frac{1}{t} + i \operatorname{sen} \frac{1}{t}), & \text{se} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0, \ \text{se} \ t = 0 \end{cases}$$

não é retificável.

4. Calcule o comprimento da curva $z(t) = 3e^{2it} + 2$ em $[-\pi, \pi]$.

5. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_\gamma y dz$, onde γ é a linha que une 0 ao i e i ao $2 + i$. (Resp.: $2 + \frac{i}{2}$)

   (b) $\displaystyle\int_\gamma ze^{z^2} dz$, onde γ é o círculo unitário. (Resp.: zero)

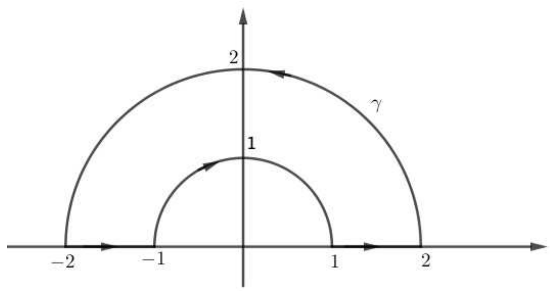
   (c) $\displaystyle\int_\gamma (z^2 + 2z + 3) dz$, onde γ é a linha que une 1 ao $2 + i$.

   (d) $\displaystyle\int_\gamma z^n dz$, onde γ é a poligonal com vértices em $-i$, $2i$ e $1 + i$.

   (e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-1}$, onde γ é o círculo de raio 2 e centro em 1, virando uma vez em volta do seu centro com direção anti-horária. (Resp.: $2\pi i$)

   (f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{z} dz$, onde γ é o semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. (Resp.: $-4 + 2\pi i$)

6. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\bar{z}} dz$, onde γ é o caminho dado abaixo:



7. Calcule $\int_\gamma z|z|dz$ ao longo da semicircunferência superior $|z| = R$ de R a $-R$, e do segmento de linha $[-R, R]$.

8. Mostre que todas as integrais $\int_\gamma f(z)dz$ a seguir são nulas, justificando.

   (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-3}$ e γ o círculo $|z| = 2$.

   (b) $f(z) = \dfrac{3z^2}{z+2i}$ e γ o círculo $|z| = \dfrac{3}{2}$.

   (c) $f(z) = \dfrac{3ze^z}{z^2+3}$ e γ o círculo $|z| = \dfrac{5}{4}$.

   (d) $f(z) = \dfrac{\log(z-2i)}{z+2}$ e γ o quadrado de vértices em 1, -1, $-i$ e i.

9. Calcule $\int_\gamma \overline{z}dz$ sendo:

   (a) γ o caminho dado pela linha que liga 0 a $1+i$.

   (b) γ o caminho que liga 0 a 1 e de 1 a $1+i$.

   Se observarmos os resultados dos item (a) e (b) acima são diferentes, ou seja, a integral dada não independe do caminho. Você sabe explicar por quê?

10. Mostre que:

    (a) $\displaystyle\int_{|z=1|} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} = 0$ (c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} = 0$ (d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right| = 2\pi$

11. Sem calcular as integrais seguintes, mostre as desigualdades

$$\left|\int_\gamma \frac{z+2}{z}dz\right| \leq 3, \quad \text{e} \quad \left|\int_\gamma \frac{dz}{z}\right| \leq 1,$$

    onde γ é o segmento de 1 a $1+i$.

12. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{(3z-1)dz}{z^2-3z-4}$, sendo γ a circunferência $|z| = 2$.

13. Seja γ o arco do círculo $|z| = 2$ que se situa no primeiro quadrante. Mostre que

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{3},$$

    sem calcular o valor da integral. (Sugestão: Use $|v+w| \geq |v| - |w|$.)

14. Seja $z_0 = re^{i\theta_0}$ e γ o caminho $\gamma(\theta) = re^{i_\theta}$, $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$. Mostre que

$$\int_\gamma z^a dz = \frac{z_0^{a+1}}{a+1}[e^{(a+1)2\pi i} - 1].$$

15. Mostre que $\displaystyle\int_\gamma \log z\, dz = 2\pi i$, onde γ é um caminho fechado envolvendo a origem uma vez no sentido positivo.

16. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ a função multiforme dada por

$$f(z) = \operatorname{Log} z.$$

   (a) Redefina f de modo a ser holomorfa, verificando sua holomorficidade. Mostre também que sua primitiva é dada por $F(z) = z \log z - z$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_{|z|=2} \log z\, dz$.

17. Seja C_r o contorno $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e f uma função contínua na origem. Prove que

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0).$$

Sugestão: escreva $f(z) = f(0) + [f(z) - f(0)]$.