Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista VIII de Exercícios (aulas 7.3, 8.1 e 8.2) - Derivação em $\mathbb{C}$

1. Justifique por quê a função complexa $f(z) = xy + iy$ não é holomorfa em nenhum ponto.

2. Seja Ω um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Se definirmos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \overline{f(z)}$, esta função g é holomorfa?

3. Verifique as equações de Cauchy-Riemann para cada função complexa abaixo:

   (a) $f(z) = e^{iz}$ (b) $f(z) = \operatorname{sen} z$ (c) $f(z) = z^2e^z$ (d) $f(z) = z \log z$

4. Considere a função
$$f(z) = \begin{cases} z^5|z|^{-4}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$
   Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $(0, 0)$, mas que f não é derivável.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por
$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{|z|^2}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$
   (a) Mostre que f é contínua em todo o $\mathbb{C}$.

   (b) Mostre que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^3}{|z|^2}$ não existe.

   (c) Verifique se as equações de Cauchy-Riemann são verdadeiras para f.

6. Sejam $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Se u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, mostre que o mesmo ocorre com as equações
$$u_1 = u^2 - v^2, \quad v_1 = 2uv$$
   e
$$u_2 = e^u \cos v, \quad v_2 = e^u \sin v.$$

7. Verifique se as funções complexas abaixo são holomorfas:

   (a) $f(z) = (x^2-y^2-2x)+2y(x-1)i$ (b) $f(z) = (e^y+e^{-y})\operatorname{sen} x+i(e^y-e^{-y}) \cos x$

8. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^2$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais. Suponha que u é diferenciável até a segunda ordem. Dizemos que u é *harmônica* em Ω se neste domínio $\Delta u = 0$. Usando as equações de Cauchy-Riemann, mostre que se f é uma função holomorfa em um aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, então as partes real e complexa u e v de f são harmônicas.

9. Prove que a função $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ é harmônica. Em seguida, determine uma função v tal que $f(z) = u + iv$ seja holomorfa.

10. Dizemos que duas funções u e v, de duas variáveis reais são *ortogonais* se $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$. Quando as funções u e v são perpendiculares, as curvas $u = c_1$ e $v = c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes, são curvas perpendiculares no plano. Usando as equações de Cauchy-Riemann, mostre que as partes real e imaginária de uma função complexa harmônica são perpendiculares. Depois, ilustre este resultado para $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$.

11. Calcule a derivada de cada função complexa a seguir (para as que forem plurívocas, tome um ramo de modo a torná-la unívoca antes de derivar).

    (a) $f(z) = \cos^2(2z - 5i)$ (b) $f(z) = \dfrac{2z-1}{1-z}$ (c) $f(z) = \sqrt[3]{1-2z}$

    (d) $f(z) = \arctan \dfrac{z}{z-1}$ (e) $f(z) = \log \sqrt{z^2-4}$ (f) $f(z) = ze^{-iz}$

12. Prove que as equações de Cauchy-Riemann, em coordenadas polares, são dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

13. Prove que que as partes real e imaginária de uma função holomorfa de uma variável complexa, quando expressa na forma polar, satisfazem a equação de Laplace na forma polar, que é

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0$$

14. Demonstre que se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ for duas vezes continuamente derivável, então

$$\Delta |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2,$$

    onde Δ é o operador laplaciano: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

15. Calcule os seguintes limites, caso existam:

    (a) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{3z}$ (b) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{|z|}$ (c) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}\, z}{e^z - 1}$ (d) $\displaystyle\lim_{z\to 0} z\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{z}$