Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista VII de Exercícios (aula 7.2)
Limite e continuidade em $\mathbb{C}$

1. Prove os limites a seguir:

   (a) $\lim\limits_{z\to -3i}(z^2-5z) = -9+15i$ (b) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{4z+i}{z+1} = \dfrac{5i}{1+i}$ (c) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{7}{z^2+1} = \infty$

2. Sejam $c_j \in \mathbb{C}$ e $f_j : \Omega \to \mathbb{C}$, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$ e z_0 ponto de acumulação de Ω, prove, por indução matemática, que

$$\lim_{z\to z_0}\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \lim_{z\to z_0} f_j(z).$$

3. Calcule $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathfrak{Re} z}{1+|z|}$.

4. Verifique se as funções complexas $f(z) = \dfrac{\mathfrak{Im} z^2}{|z|}$ e $g(z) = \dfrac{\mathfrak{Re} z}{|z|}$, ambas com $z \neq 0$ possuem limite no ponto $z = 0$.

5. Prove que $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{i}{z+i} = 0$.

6. Mostre que $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ não existe.

7. Calcule os limites complexos:

   (a) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^6+1}$ (b) $\lim\limits_{z\to 2+i}\dfrac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2}$ (c) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+z}-1}{z}$

8. Prove que, se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha$, então $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)| = |\alpha|$.

9. Prove que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \alpha$ se, e somente se, a sequência $(f(z_n))$ converge para α para toda sequência (z_n) tal que $z_n \to \alpha$.

10. Se $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \alpha$ e suponha que $f(z)$ esteja definida para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \alpha$. Usando $f(z) = \operatorname{sen}\pi z$, justifique que a recíproca é falsa.

11. Prove que se $f(z) \to \infty$ quando $z \to z_0$ e $|g(z)| > c > 0$ numa vizinhança de z_0, então $f(z)g(z) \to \infty$ quando $z \to z_0$.

12. Verifique se as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ abaixo são contínuas no ponto z_0 indicado:

    (a) $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & \text{se } z \neq 0 \\ 1, & \text{se } z = 0 \end{cases}$ no ponto $z_0 = 0$

(b) $f(z) = \begin{cases} \frac{z\Re e z}{|z|}, & \text{se } z \neq 0 \\ 1, & \text{se } z = 0 \end{cases}$ no ponto $z_0 = 0$

(c) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z^2+z+1}, & \text{se } |z| \neq 1 \\ 3, & \text{se } z = 0 \end{cases}$ no ponto $z_0 = 1$

13. Mostre que a função $f(z) = \overline{z}$ é contínua em todo o plano complexo.

14. Prove que $f(z) = \sqrt{z}$ é contínua em todo $z \in \mathbb{C}$.