**Universidade Federal de Pelotas**
**Curso de Licenciatura em Matemática**
**Disciplina de Variáveis Complexas**
**Prof. Dr. Maurício Zahn**
**Lista V de Exercícios (aulas 5.2 e 5.3)**
**Séries em $\mathbb{C}$**

1. Sejam duas séries complexas $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$. Mostre que, se amabas são convergentes, então as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z_n + w_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(z_n w_n)$$

também são convergentes.

2. Seja $(z_n)$ uma sequência complexa tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = c$. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge em módulo se $c < 1$ e diverge se $c > 1$ (*este é outro teste de convergência de séries*).

3. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{5^{\frac{n}{2}}}$, onde $w = \sqrt{3} + i$, é convergente.

4. Prove que a série $1 - 2i + 3i - 4i + ...$ diverge.

5. Mostre que a série $1 + \frac{i}{3} + \left(\frac{i}{3}\right)^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^{n-1}$ é convergente e que sua soma vale $\frac{9+3i}{10}$.

6. Mostre que a série complexa $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + \frac{i}{n^2}$ converge.

7. Verifique a convergência ou divergência de cada série complexa a seguir:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$

8. Defina por $\ell_2(\mathbb{C})$ o conjunto de todas as sequências complexas definida por

$$\ell_2(\mathbb{C}) = \{(z_n)_n : \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2 \quad \text{é convergente}\}.$$

   (a) Se $(z_n), (w_n) \in \ell_2(\mathbb{C})$, mostre que a sequência $(u_n)$ dada por

$$u_n = \alpha z_n + \beta z_n$$

   também pertence a $\ell_2(\mathbb{C})$.

(b) Se $(z_n), (w_n) \in \ell_2(\mathbb{C})$, mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n \overline{w}_n$ é convergente.

(c) Defina $\langle z, w \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \overline{w}_n$, onde $z = (z_n)$ e $w = (w_n)$ pertencem a $\ell_2(\mathbb{C})$. Prove que, se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então valem as propriedades

$$\langle \alpha z + \beta u, w \rangle = \alpha \langle z, w \rangle + \beta \langle u, w \rangle \quad \text{e} \quad \langle z, \alpha w \rangle = \overline{\alpha} \langle z, w \rangle.$$

(d) Defina $||z|| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$. Prove que valem as propriedades:

(i) $||z + w|| \leq ||z|| + ||w||$
(ii) $||\alpha z|| = |\alpha| \cdot ||z||$
(iii) $||z|| \geq 0$
(iv) $|\langle z, w \rangle| \leq ||z|| \cdot ||w||$