Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista IV de Exercícios (aulas 4.2, 4.3 e 5.1)
Sequências em $\mathbb{C}$

1. Prove que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{i}{i+n} = 0$.

2. Prove que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+n^2 i}{n-n^2 i} = -1$.

3. Seja a sequência complexa (z_n) dada por
$$z_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{3}\right)^n.$$
Represente geometricamente alguns de seus pontos e estude sua convergência.

4. Mostre que a sequência (z_n) dada por $z_n = \dfrac{1}{i+\sqrt{n}}$ é convergente. Qual é o seu limite?

5. Prove que se $z_n \to a$ quando $n \to \infty$, então
$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + ... + z_n}{n} = a.$$

6. Prove que uma sequência complexa $z_n = x_n + iy_n$ converge para $\alpha = a + ib$ se, e somente se,
$$\lim_{b\to\infty} x_n = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{b\to\infty} y_n = b.$$

7. Prove que $z_n \to \alpha$ se, e somente se $d(z_n, \alpha) \to 0$.

8. Sejam (z_n) e (w_n) duas sequências complexas tais que $|z_n| \leq |w_n|$, $\forall n$. Mostre que se $w_n \to 0$, então $z_n \to 0$.

9. Seja (z_n) uma sequência complexa tal que $z_n \to \alpha$. Considerando a sequência (w_n) definida por $w_n = \overline{z_n}$, mostre que $w_n \to \overline{\alpha}$.

10. Mostre que a sequência (z_n) dada por $z_n = \dfrac{i^n \cdot n}{n+1}$ possui uma subsequência convergente.

11. Prove que uma sequência complexa é convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy, provando os itens abaixo:

    (a) Mostre que se (z_n) for convergente, então (z_n) ela é de Cauchy.

    (b) Mostre que se (z_n) for uma sequência de Cauchy, então ela é limitada.

    (c) Mostre que se (z_n) for uma sequência de Cauchy, então ela é convergente.

12. Prove que a sequência (z_n) dada por $z_n = \dfrac{\cos n\pi}{n} i$ é uma sequência de Cauchy.

13. Dada $z_n = n^2 - ni$, prove que $z_n \to \infty$.

14. Seja a sequência (z_n) dada por $z_n = n + i \ln n$. Prove que $z_n \to \infty$.

15. Por uma *vizinhança* no pólo norte N da esfera de Riemann S^2 definimos mediante a projeção estereográfica uma vizinhança do infinito no plano complexo extendido. Descreva tal vizinhança geometricamente. Dada uma sequência de pontos (z_n) no plano complexo $\mathbb{C}$, seja (P_n) a sequência de pontos correspondente na esfera de Riemann. Prove que $z_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ se, e somente se, $P_n \to N$ quando $n \to \infty$, i.e., se, e somente se, toda vizinhança de N contém um número infinito de termos da sequência (P_n).